令和7年度　8月実施
筑波大学大学院　入学試験
理工情報生命学術院　数理物質科学研究群
物理学学位プログラム　試験問題

専門科目

注意事項（選択、解答についての必要な指示）

1. 5 つの問題（I~V）がある。問題 I では最初の説明文を良く読んでから解答せよ。問題 II~V では、基礎問題と応用問題（[A], [B]）があり、全ての問題に解答せよ。問題文は、最初に日本語で、次に英語で書かれている。問題の内容は同じものである。
   There are five problems (I~V). For the problem I, read carefully the explanation in the first page. Each of problems II~V consists of basic and advanced problems ([A], [B]). Answer both of them. All the problems are given first in Japanese and then in English. The contents of the problems are the same.
2. それぞれの問題につき一枚の解答用紙を用いよ。また、問題番号を明記せよ。
   Use one sheet of answer paper separately for each problem. Write the problem number at the top of the sheets.
3. 下書き用紙は採点の対象としない。
   Draft sheets will not be marked.

I

以下の 10 問のうち 5 問を選択し、問題番号を明記の上、解答せよ。i は虚数単位を表すものとする。

問 1. xy 平面において、放物線 $y = x^2$ を原点を中心として反時計回りに 30 度回転させる。回転後の曲線を表す方程式を求めよ。

問 2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 0 & 3b & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}$ を考える。a、b は実数で、$a > 0$ かつ $b < 0$ のとき、$A^2 = I$ となるための a と b を求めよ（I は単位行列)。

問 3. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ。

問 4. 微分方程式 $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} - 10\dfrac{dy(x)}{dx} + 25y(x) = 0$ について、境界条件 $y(0) = 0$、$\dfrac{dy(0)}{dx} = 10$ を満たす解を求めよ。

問 5. 微分方程式 $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + 4y(x) = \sin x$ について、一般解を求めよ。

問 6. $\exp(z) = 10\,i$ を満たす複素数 z を求めよ。

問 7. 関数 $f(x) = \exp(-a|x|)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ (a は実数、かつ $a > 0$ とする)。ただし、フーリエ変換は次のように定義する、
$F(\omega) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-i\omega x} dx$。

問 8. $\vec{r} = (x, y, z)$、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。$\vec{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{\vec{r}}{r^5} \right)$ を計算せよ (ただし、$r \neq 0$ とする)。

(次頁につづく)

問 9. 実積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx$ を求める。まず、図 1 のように複素平面における閉曲線 C における積分 $I = \displaystyle\int_C \frac{z^2}{z^4+1}dz$ を考え、C 内の特異点とその留数を計算せよ。ただし、r は十分大きいとする。次に、その結果と $r \to \infty$ で円弧の部分に対する積分が 0 になる事を用いて、実積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx$ の値を求めよ。

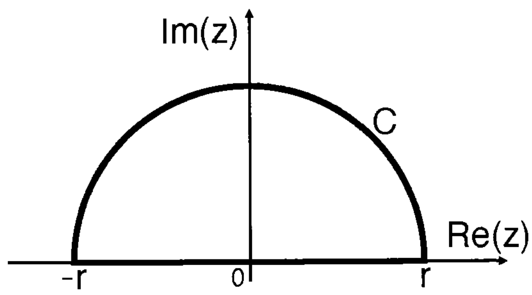

図 1

問 10. 実積分 $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ を求める。図 2 のような複素平面上の閉曲線を考える。閉曲線は、$-r$ から $-\epsilon$ までの直線,$-\epsilon$ から ϵ までの円弧、ϵ から r までの直線、r から $-r$ までの円弧の 4 つの部分からなる。この閉曲線に沿った積分を用いて、実積分 $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ の値を求めよ。

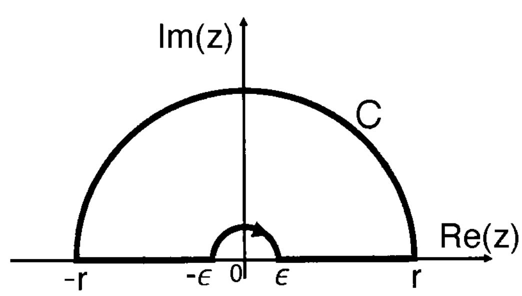

図 2

I

Answer five out of the following ten questions. Write the question numbers on the answer sheet clearly. The imaginary unit is represented by i.

Q1. Consider the curve $y = x^2$ in the xy-plane. Rotate the curve counter-clockwise by 30 degrees about the origin in the xy-plane. Write down the equation of the curve after the rotation.

Q2. Consider a matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & a+b & 0 \\ 0 & 3b & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}$. a, b are real numbers, and $a > 0$ and $b < 0$. Find the a and b such that $A^2 = I$. Note that I is the identity matrix.

Q3. Find all eigenvalues of a matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q4. Find the solution of the following differential equation,

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} - 10\frac{dy(x)}{dx} + 25y(x) = 0$$

that satisfies the boundary conditions, $y(0) = 0$ and $\dfrac{dy(0)}{dx} = 10$.

Q5. Find the general solution for the following differential equation.

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + 4y(x) = \sin x$$

Q6. Find the complex number z that satisfies the following equation.

$$\exp(z) = 10\, i$$

(Continued on the next page)

Q7. Find the function $F(\omega)$ that is the Fourier transform of the function $f(x) = \exp(-a|x|)$, where a is a real number and greater than zero. Here, the Fourier transform is defined as $F(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$.

Q8. Let $\vec{r} = (x, y, z)$ be a position vector and $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Here, $r \neq 0$. Calculate $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\vec{r}}{r^5} \right)$.

Q9. To find the solution of the integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$, firstly consider the integral $I = \int_C \frac{z^2}{z^4+1} dz$ along the closed curve C in Figure 1. Here, z is complex number and $x = Re(z)$. Find the singular points within C and their residues (note that r is a sufficiently large value). Then, using the results of the residues and the condition that the integral along the arc of C become zero when $r \to \infty$, find the solution of the integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$.

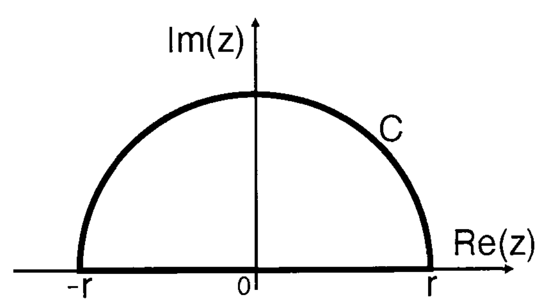

Figure 1

(Continued on the next page)

Q10. Find the solution of the integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Consider the closed curve C in Figure 2. Here, z is complex number and $x = Re(z)$. The closed curve C consists of the following four parts: a line from $-r$ to $-\epsilon$, an arc from $-\epsilon$ to ϵ, a line from ϵ to r, and an arc from r to $-r$. Using the result of the integral along the closed curve C, find the solution of the integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

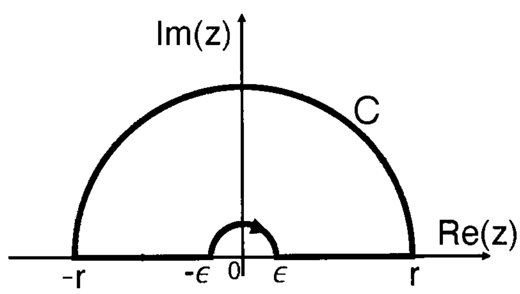

Figure 2

II

[A]

剛体の慣性モーメント I は、物体の各体積要素 $dxdydz$ における密度 ρ と、その回転軸からの距離 r の二乗との積を剛体全体について積分することで求められる。

$$I = \int r^2 \rho \, dxdydz$$

以下の問いに答えよ。

問1．長さL、質量Mの一様な細い棒が、棒の一端を中心に棒に垂直な軸のまわりを回転する。回転軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

問2．質量M、半径R の均質な円板が、円板の中心を通り円板に垂直な軸を中心に角速度 ω で回転している。この円板の回転軸周りの慣性モーメントを求め、運動エネルギーを計算せよ。

問3．長さL、質量Mの一様な細い棒が、一端を固定して鉛直に立てられている。棒が静かに倒れ始めるとき、鉛直線からの角度θ の位置における角加速度を求めよ。ただし、棒の一端を通り棒に垂直な軸のまわりの慣性モーメントを I_r とし、重力加速度の大きさは g とせよ。

[B]

図1のように、質量 m の二つの質点1と質点2を、水平距離 a だけ離して、長さ l の質量の無視できる糸でつるし、この2質点を自然長 a、バネ定数 K の質量の無視できるバネでつないで、バネの方向に微小振動させたときの運動について考える。一般化座標として、図のように鉛直線と糸がなす角θ_1, θ_2を用いて以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度の大きさは g とし、微小角 θ について、$\sin\theta \approx \theta$,　$\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ と近似できるものとする。また、ある変数 X の時間についての1階、2階微分をそれぞれ $\dot{X}$、$\ddot{X}$ で表す。

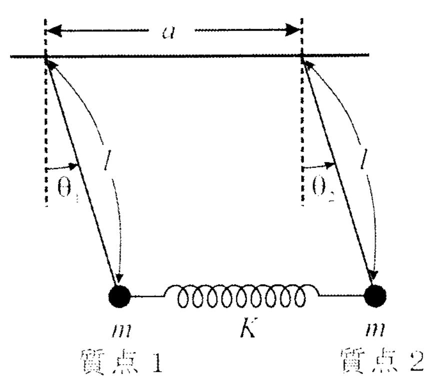

図1

（次頁につづく）

問1． この連成振り子の系に対するラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \boxed{(A)}\left(\dot{\theta_1}^2 + \dot{\theta_2}^2\right) + \boxed{(B)}\left(\theta_1{}^2 + \theta_2{}^2\right) + \boxed{(C)}(\theta_1 - \theta_2)^2$$

のように表される。係数(A)、(B)、(C)を以下からそれぞれ選べ。

$$\frac{mgl}{2}, -\frac{mgl}{2}, \frac{ml^2}{2}, -\frac{ml^2}{2}, \frac{Kl^2}{2}, -\frac{Kl^2}{2}, mgl, -mgl, ml^2, -ml^2, Kl^2, -Kl^2$$

問2． $\omega_g = \sqrt{\frac{g}{l}}, \omega_K = \sqrt{\frac{K}{m}}$ として、運動方程式を $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \omega_g, \omega_K$ のうち必要なものを用いて書け。

問3． 基準座標 $\Theta^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + \theta_2)$、$\Theta^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - \theta_2)$ を導入して運動方程式を書き換えよ。$\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \dot{\Theta}^{(1)}, \dot{\Theta}^{(2)}, \ddot{\Theta}^{(1)}, \ddot{\Theta}^{(2)}, \omega_g, \omega_K$ のうち必要なものを用いて書け。

問4． $\Theta^{(1)}$と$\Theta^{(2)}$に対応する固有角振動数$\omega^{(1)} > 0, \omega^{(2)} > 0$を求めよ。また、固有振動モードでは二つの質点はどのような振動をするか説明せよ。

次に、図 2 のように、質点2に水平方向に周期的な外力 $F_0 \cos \omega t$ を加えて微小振動させた。質点1と質点2にはそれぞれの速さ v_1, v_2 に比例する抵抗力がはたらき、その大きさを $m\gamma v_1$ と $m\gamma v_2$とする。

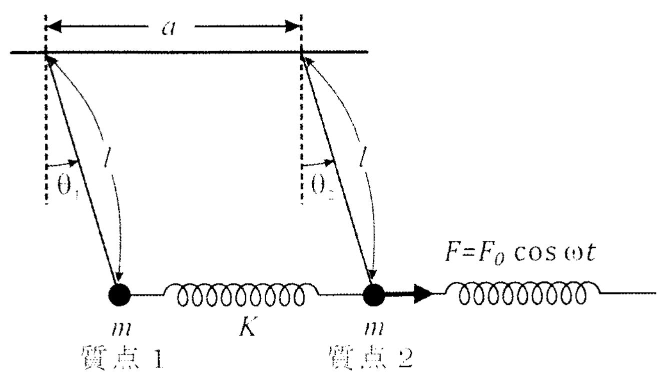

図2

問5． θ_1, θ_2が満たす運動方程式を$m, l, \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \omega, F_0, \omega_g, \omega_K, \gamma$ のうち必要なものを用いて書け。

II

[A]

The moment of inertia I of a rigid body is determined by integrating the product of the density ρ at each volume element $dxdydz$ and the square of the distance r from the axis of rotation over the entire rigid body.

$$I = \int r^2 \rho \, dxdydz$$

Answer the following questions.

Q1: A thin uniform rod of length L and mass M rotates around an axis perpendicular to the rod at one end. Find the moment of inertia of this rod about the axis of rotation.

Q2: A uniform disk with mass M and radius R is rotating about an axis perpendicular to the disk and through its center with angular velocity ω. Find the moment of inertia of this disk about the axis of rotation and calculate its kinetic energy.

Q3: A thin uniform rod of length L and mass M is standing vertically with one end fixed. When the rod begins to fall gently, find the angular acceleration of the rod at the position where it makes an angle θ with the vertical axis. Let I_r be the moment of inertia about an axis perpendicular to the rod at one end, and let g be the magnitude of the gravitational acceleration.

(Continued on the next page)

[B]

As shown in Fig. 1 consider two point masses, each of mass m, suspended by strings of negligible mass and length l and separated by a horizontal distance a, connected by a spring with negligible mass, natural length a, and spring constant K. We examine the motion when they undergo small oscillations in the direction of the spring. Using the angles θ_1 and θ_2, which the strings make with the vertical axis, as generalized coordinates, answer the following questions. Let the magnitude of the gravitational acceleration be g, and for small angles θ, approximate $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$. Also, the first and second time derivatives of a variable X are denoted as $\dot{X}$ and $\ddot{X}$, respectively.

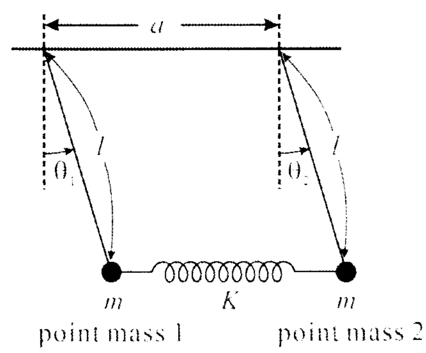

Figure 1

Q1: The Lagrangian for this coupled pendulum system is $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L} = \boxed{(A)}\left(\dot{\theta_1}^2 + \dot{\theta_2}^2\right) + \boxed{(B)}\left(\theta_1{}^2 + \theta_2{}^2\right) + \boxed{(C)}(\theta_1 - \theta_2)^2$$

Choose the coefficients (A), (B) and (C) from the following.

$$\frac{mgl}{2}, -\frac{mgl}{2}, \frac{ml^2}{2}, -\frac{ml^2}{2}, \frac{Kl^2}{2}, -\frac{Kl^2}{2}, mgl, -mgl, ml^2, -ml^2, Kl^2, -Kl^2$$

Q2: Let $\omega_g = \sqrt{\frac{g}{l}}$ and $\omega_K = \sqrt{\frac{K}{m}}$. Write the equations of motion, using $\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \omega_g, \omega_K$ if necessary.

Q3: Introduce the normal coordinates $\Theta^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + \theta_2)$, $\Theta^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - \theta_2)$, and rewrite the equations of motion, using $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \dot{\Theta}^{(1)}, \dot{\Theta}^{(2)}, \ddot{\Theta}^{(1)}, \ddot{\Theta}^{(2)}, \omega_g, \omega_K$ if necessary.

Q4: Find the natural angular frequencies $\omega^{(1)} > 0$ and $\omega^{(2)} > 0$ corresponding to $\Theta^{(1)}$ and $\Theta^{(2)}$. Also, explain the motion of the two point masses in the natural vibration modes.

(Continued on the next page)

Next, as shown in Fig. 2, a periodic external force $F_0 \cos \omega t$ was applied horizontally to point mass 2, causing it to undergo small oscillations. In this situation, point mass 1 and point mass 2 experience resistive forces proportional to their velocities v_1 and v_2, with magnitudes $m\gamma v_1$ and $m\gamma v_2$, respectively.

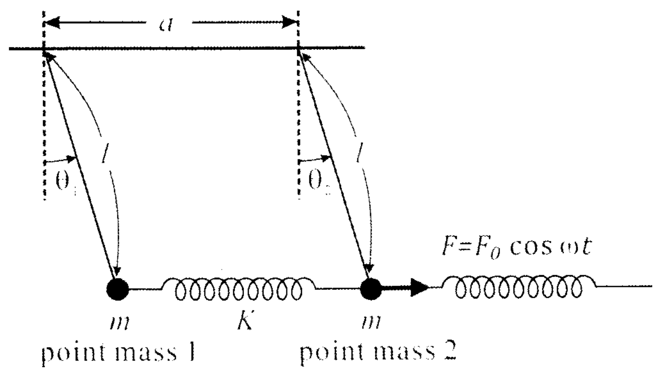

Figure 2

Q5: Write the equations of motion in term of θ_1 and θ_2, using $m, l, \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \omega$, $F_0, \omega_g, \omega_K, \gamma$ if necessary.

III

以下の問 [A], [B] に答えよ。ただし、$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ とし、h はプランク定数である。

[A]

問 1.　1次元系における位置演算子を $\hat{x}$, 運動量演算子を $\hat{p}$ とするとき、交換関係 $[\hat{p}, \hat{x}^3] = -3i\hbar\hat{x}^2$ が成り立つことを示せ。ただし、演算子 $\hat{x}$ と $\hat{p}$ は交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たす。

問 2. 角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ とするとき、次の (a), (b) をそれぞれ求めよ。

(a) $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$

(b) $[\hat{L}_x, [\hat{L}_y, \hat{L}_z]] - [\hat{L}_y, [\hat{L}_z, \hat{L}_x]] + [\hat{L}_z, [\hat{L}_x, \hat{L}_y]]$

問 3. 角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ とするとき、$\hat{\boldsymbol{L}}^2$ と $\hat{L}_z$ の固有状態 $|l, m\rangle$ は、$\hat{\boldsymbol{L}}^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle$、$\hat{L}_z\, l, m\rangle = \hbar m|l, m\rangle$ を満たす。このとき、状態 $|3, -2\rangle$ に対する $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2$ の期待値を求めよ。

(次頁につづく)

[B]

1次元系における1粒子の運動を考え、座標を x とする。デルタ関数型ポテンシャル $V(x) = -V_0\delta(x)$ における粒子の束縛状態を考える。ただし、粒子の質量を m、エネルギーを $E(<0)$、$V_0 > 0$ とする。$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数を表す。

問 1. この系における時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。また、束縛状態の波動関数が無限遠方で満たすべき条件を述べよ。

問 2. $x < 0$ および $x > 0$ の2つの領域に分けて、問1のシュレディンガー方程式を解くことを考える。それぞれの領域での解を m, E, $\hbar$ を用いて書け。ただし、それぞれの波動関数の振幅には任意の定数を用いよ。

問 3. 問1のシュレディンガー方程式を微小区間 $[-\epsilon,\ \epsilon]$ で積分し、$\epsilon \to 0$ の極限を考えることにより、以下の式が成り立つことを示せ。ただし、$\psi(x)$ は波動関数を表す。

$$\left.\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right|_{x\to+0} - \left.\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right|_{x\to-0} = -\frac{2m}{\hbar^2}V_0\psi(0) \tag{1}$$

問 4. 式(1)を条件として、束縛状態の規格化された波動関数およびエネルギー E を m, V_0, $\hbar$ を用いて表せ。

問 5. 粒子の位置演算子を $\hat{x}$、運動量演算子を $\hat{p}$ とする。このとき、粒子の位置の分散 $\sigma_x^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$、運動量の分散 $\sigma_p^2 = \langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2$ をそれぞれ求め、$|\sigma_x||\sigma_p|$ を計算せよ。$\langle\ \rangle$ は束縛状態における期待値を表す。ただし、必要に応じて、符号関数 $\mathrm{sgn}(x)$ の以下の性質を用いてもよい。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x) &= 2\delta(x) \\
\mathrm{sgn}(x) &= \frac{d}{dx}|x| \quad (x \neq 0) \\
\mathrm{sgn}(x) &= \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

III

Answer the following questions [A] and [B]. Let $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ where h is the Planck constant.

[A]

Q1. When the position operator $\hat{x}$ and momentum operator $\hat{p}$ in one dimensional system are given, prove the commutation relation $[\hat{p}, \hat{x}^3] = -3i\hbar\hat{x}^2$. Note that the operators $\hat{x}$ and $\hat{p}$ satisfy the commutation relation $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

Q2. Calculate (a) and (b) below for the angular momentum operator $\hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$.

(a) $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$

(b) $[\hat{L}_x, [\hat{L}_y, \hat{L}_z]] + [\hat{L}_y, [\hat{L}_z, \hat{L}_x]] + [\hat{L}_z, [\hat{L}_x, \hat{L}_y]]$

Q3. For the angular momentum operator $\hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$, an eigenstate of $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ and $\hat{L}_z$, $|l, m\rangle$, satisfies $\hat{\boldsymbol{L}}^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle$ and $\hat{L}_z|l, m\rangle = \hbar m|l, m\rangle$. Answer the expectation value of $\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2$ for the state $|3, -2\rangle$.

(Continued on the next page)

[B]

Consider the motion of a particle in one dimensional system with the coordinate x. Consider the particle in a bound state of the delta function potential $V(x) = -V_0\delta(x)$, where the particle mass is m, its energy is $E(< 0)$, and $V_0 > 0$. Note that $\delta(x)$ is the Dirac delta function.

Q1. Write a time-independent Schrödinger equation in this system. Also, state the condition that the wave function in a bound state should satisfy at infinity.

Q2. Consider to solve the Schrödinger equation in Q1 for two separate regions: $x < 0$ and $x > 0$. Write the solutions in each region using m, E, and $\hbar$. One can use arbitrary constants for the amplitude of each wave function.

Q3. By integrating the Schrödinger equation in Q1 over small interval $[-\epsilon, \epsilon]$ and considering the limit of $\epsilon \to 0$, derive the following equation with the wave function $\psi(x)$.

$$\left.\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right|_{x\to+0} - \left.\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right|_{x\to-0} = -\frac{2m}{\hbar^2}V_0\psi(0) \qquad (1)$$

Q4. Requiring Eq. (1) as a condition, write a normalized wave function for the bound state and the energy E using m, V_0, and $\hbar$.

Q5. When the position operator $\hat{x}$ and the momentum operator $\hat{p}$ are given, calculate the variance of the particle position, $\sigma_x^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$, and that of the momentum, $\sigma_p^2 = \langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2$, respectively, and then calculate $|\sigma_x||\sigma_p|$. Note that $\langle\ \rangle$ denotes an expectation value for the bound state. If needed, use the following relations for the sign function $\mathrm{sgn}(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x) &= 2\delta(x) \\
\mathrm{sgn}(x) &= \frac{d}{dx}|x| \quad (x \neq 0) \\
\mathrm{sgn}(x) &= \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

IV

真空中の誘電率をε_0、真空中の透磁率をμ_0として、以下の問いに答えよ。

[A]

図１のような、充分大きな一対の極板を平行に並べたコンデンサー（極板の面積S_C、極板間隔d．静電容量C）と、充分長い中空のソレノイド（単位長さあたりの導線巻き数n、断面積S_L、長さl、自己インダクタンスL）が直列に接続された閉回路が真空中に置かれている。

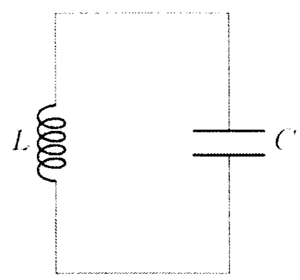

図１

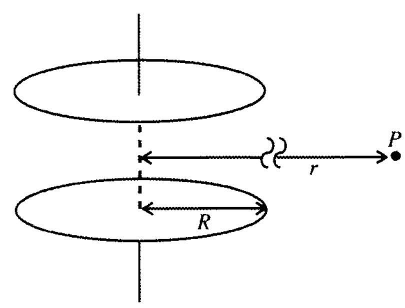

図２

問1. この回路のコンデンサーの静電容量CをS_C、d、ε_0を使って表せ。

問2. この回路のソレノイドの自己インダクタンスLをn、S_L、l、μ_0を使って表せ。

この回路のコンデンサーの極板に電荷を与えると、回路には周期的に時間依存する電流$I(t)$が流れた。

問３. 導線のインピーダンスは無視できるとして、この電流$I(t)$の周波数fをC、Lを使って表せ。

問4. 図１のコンデンサーは、図２のようにその極板は半径Rの円形で、その中心に導線が接続されている。図中の点Pにおける磁束密度の大きさBを、r、$I(t)$、μ_0を使って表せ。但し、点Pはコンデンサーの極板の中心を貫く軸から距離rだけ離れていて、rはRよりも充分大きいとする。

（次頁につづく）

[B]

図３に示すように、円柱の内部導体及び円筒状の外部導体と中空部からなるz軸方向に充分長い同軸の送電線が、真空中に置かれているとする。z軸に垂直な面をxy平面とし、内部導体と外部導体の抵抗は無視できて、内部導体の半径をaとして以下の問いに答えよ。

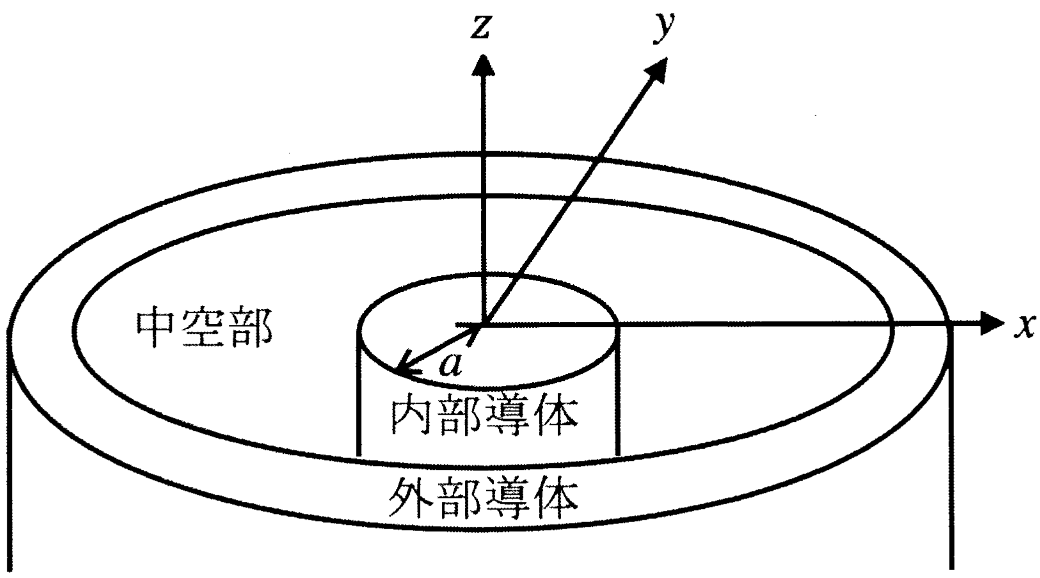

図３

問1.　内部導体の表面に電流Iがz軸方向の正の向きに流れている場合、この送電線の中空部の磁束密度の大きさBの最大値をI、a、μ_0を用いて表せ。

問2.　内部導体の表面に単位長さあたり電荷qがある場合、この送電線の中空部の電場の大きさEの最大値をq、a、ε_0を用いて表せ。

（次頁につづく）

次に、周波数fの電磁波が、送電線に沿ってz軸方向の正の向きに、送電線の中空部を伝搬している場合を考える。この電磁波の電場及び磁束密度の向きはz軸方向に対して垂直であり、各々$\vec{E}_{\perp}$及び$\vec{B}_{\perp}$で表すとする。この電場$\vec{E}_{\perp}$及び磁束密度$\vec{B}_{\perp}$は、波数kを用いて次式で書ける。

$\vec{E}_{\perp}=\vec{E}_0(x,y)\exp(ikz - i2\pi ft)$、$\vec{B}_{\perp}=\vec{B}_0(x,y)\exp(ikz - i2\pi ft)$　　i:虚数単位

問3.　電場$\vec{E}_{\perp}$と磁束密度$\vec{B}_{\perp}$は次式を満たす。

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}_{\perp}= i\alpha\vec{B}_{\perp}、\vec{\nabla}\times\vec{B}_{\perp}= -i\beta\vec{E}_{\perp}$$

式の係数α、βを求めよ。

次問以降、任意のベクトル$\vec{F}$に対して成り立つ次式を、必要に応じて用いてよい。

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{F}$$

問4.　電場$\vec{E}_{\perp}$と磁束密度$\vec{B}_{\perp}$は次式を満たす。

$$\left(\vec{\nabla}^2+4\pi^2\gamma\right)\vec{E}_{\perp}=0、\left(\vec{\nabla}^2+4\pi^2\gamma\right)\vec{B}_{\perp}=0$$

この式の係数γをf、ε_0、μ_0を用いて表せ。

問5.　電場$\vec{E}_{\perp}$並びに磁束密度$\vec{B}_{\perp}$が、渦がなく、かつ発散もないベクトルであることを示すために、デカルト座標上で以下の式で定義される演算子$\vec{\nabla}_{\perp}$を考える。

$$\vec{\nabla}_{\perp}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},0\right)$$

この演算子$\vec{\nabla}_{\perp}$を用いた以下の4つの式が、全て成り立つことを示せ。

$$\vec{\nabla}_{\perp}\cdot\vec{E}_{\perp}=0、\vec{\nabla}_{\perp}\cdot\vec{B}_{\perp}=0、\vec{\nabla}_{\perp}\times\vec{E}_{\perp}=0、\vec{\nabla}_{\perp}\times\vec{B}_{\perp}=0$$

IV

Answer the following questions. Let a permittivity of vacuum be ε_0 and a permeability of vacuum be μ_0.

[A]

As shown in Fig. 1, a closed circuit with a capacitor having a pair of sufficiently large parallel electrode plates (electrode plate area S_C, electrode plate spacing d, capacitance C) and a sufficiently long hollow solenoid (the number of turns of wire per unit length n, cross-sectional area S_L, length l, self-inductance L) is placed in vacuum. The capacitor and the solenoid are connected in series.

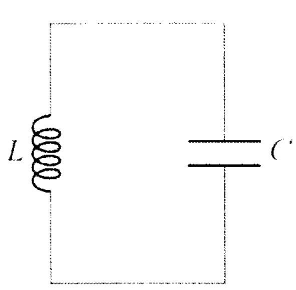

Fig.1

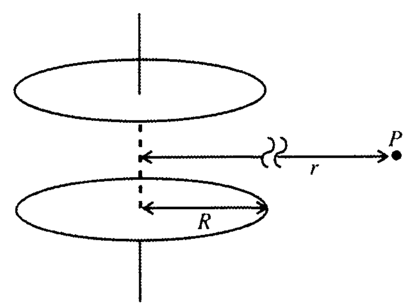

Fig.2

Q1. Write the capacitance C of the capacitor in this circuit using S_C, d, and ε_0.

Q2. Write the self-inductance L of the solenoid in this circuit using n, S_L, l, and μ_0.

When a charge is added to the electrode plates of the capacitor in the circuit, a current $I(t)$, that periodically depends on the time flows through the circuit.

Q3. Write the frequency f of the current $I(t)$ using C and L. Here the impedance of the conducting wire of the circuit is negligible.

(Continued on the next page)

Q4. As shown in Fig. 2, each electrode plate of the capacitor in Fig. 1 is circular with radius R, and the conducting wire of the circuit is connected to its center. Express the magnitude of the magnetic flux density B at the point P in Fig. 2 using r, $I(t)$, and μ_0, where the point P is a distance r away from the axis through the center of the capacitor's plate, and r is sufficiently greater than R.

(Continued on the next page)

[B]

As shown in Fig. 3, a sufficiently long coaxial transmission line, consisting of a cylindrical inner conductor and a cylindrical outer conductor, is placed in vacuum along the z-axis. The plane perpendicular to the z-axis is the xy-plane and resistance of inner and outer conductors is negligible. The radius of the inner conducting cylinder is a. Answer the following questions.

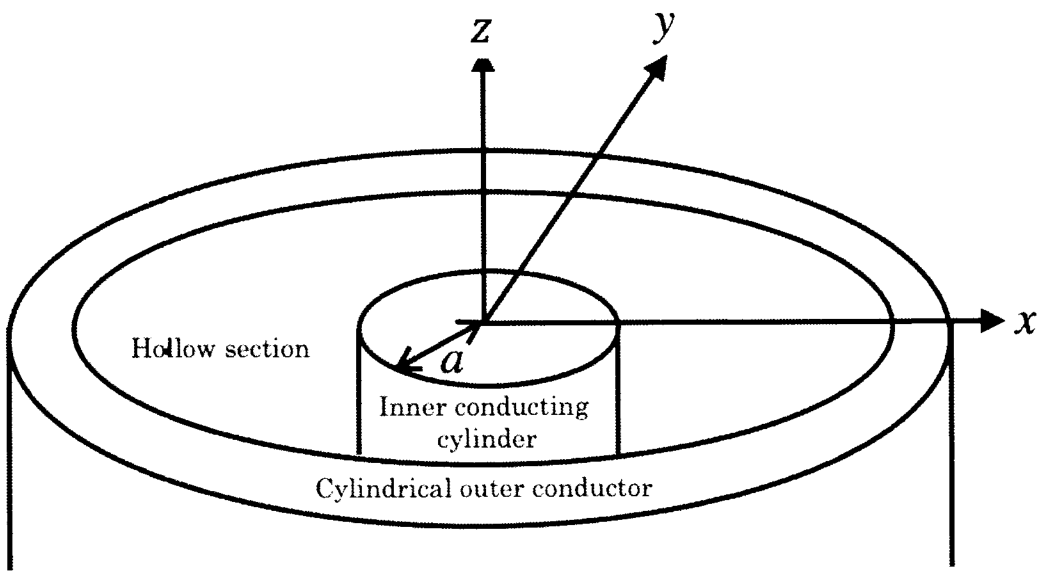

Fig.3

Q1. The current I is flowing in the positive direction of the z-axis on the surface of the inner conducting cylinder. Express the maximum value of the magnitude of the magnetic flux density B in the hollow section of this transmission line using I, a, and μ_0.

Q2. A charge q per unit length on the surface of the inner conductor is located. Write the maximum magnitude of the electric field E in the hollow section of this transmission line using q, a, and ε_0.

(Continued on the next page)

Next, consider the case where an electromagnetic wave of frequency f propagates in the hollow section of this transmission line in the positive direction of the z-axis. The electric field and magnetic flux density of this electromagnetic wave are perpendicular to the z-axis direction. The electric field and the magnetic flux density are denoted by $\vec{E}_{\perp}$ and $\vec{B}_{\perp}$, respectively. Using the wavenumber k, $\vec{E}_{\perp}$ and $\vec{B}_{\perp}$ can be written as $\vec{E}_{\perp} = \vec{E}_0(x,y)\exp(ikz - i2\pi ft)$ and $\vec{B}_{\perp} = \vec{B}_0(x,y)\exp(ikz - i2\pi ft)$ where i is imaginary unit.

Q3. $\vec{E}_{\perp}$ and $\vec{B}_{\perp}$ satisfy the following two equations.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_{\perp} = i\alpha \vec{B}_{\perp}、\ \vec{\nabla} \times \vec{B}_{\perp} = -i\beta \vec{E}_{\perp}$$

Find α and β.

From the next problem onward, the following equation can be used if necessary. It is valid for any vector $\vec{F}$,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$$

Q4. $\vec{E}_{\perp}$ and $\vec{B}_{\perp}$ satisfy the following two equations.

$$(\vec{\nabla}^2 + 4\pi^2\gamma)\vec{E}_{\perp} = 0、\ (\vec{\nabla}^2 + 4\pi^2\gamma)\vec{B}_{\perp} = 0$$

Express γ using f, ε_0, and μ_0.

Q5. To show that $\vec{E}_{\perp}$ and $\vec{B}_{\perp}$ are vectors with neither rotation nor divergence, consider the operator $\vec{\nabla}_{\perp}$ defined by the following equation in Cartesian coordinates

$$\vec{\nabla}_{\perp} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0\right).$$

Show that the following four equations using this $\vec{\nabla}_{\perp}$ are valid.

$$\vec{\nabla}_{\perp} \cdot \vec{E}_{\perp} = 0、\ \vec{\nabla}_{\perp} \cdot \vec{B}_{\perp} = 0、\ \vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{E}_{\perp} = 0、\ \vec{\nabla}_{\perp} \times \vec{B}_{\perp} = 0$$

V

[A]

以下の問いに答えよ。

問 1. 二つの部分系 A、B からなる系を考える。部分系間の相互作用が十分弱く、系全体のエネルギーが各部分系のエネルギーの和で与えられているとき、系全体のヘルムホルツの自由エネルギーを各部分系の自由エネルギー F_A、F_B を使って表せ。

問 2. 温度 T、化学ポテンシャル μ のグランドカノニカル分布に従う系の大分配関数を Ξ とする。ボルツマン定数を k_B とし、逆温度を $\beta = (k_\mathrm{B}T)^{-1}$ と定義する。この系の粒子数期待値 $\langle N \rangle$ を β、μ、Ξ を使って表せ。

問 3. 以下の選択肢の中から正しいものを二つ選べ。

(a) 圧力、温度は示強的だが、化学ポテンシャルは示量的である。

(b) 各エネルギー準位を占める粒子数が十分小さい場合、ボース分布、フェルミ分布はともにボルツマン分布に帰着される。

(c) 定積比熱が正であれば、ヘルムホルツの自由エネルギーは温度の関数として下に凸である。

(d) ボース粒子系では、粒子間の相互作用がない場合でもボース・アインシュタイン凝縮が起こり得る。

（次頁に続く）

[B]

以下では、ボルツマン定数を k_{B}、プランク定数を h とする。また、$\hbar = h/2\pi$ とする。

N 個の 3 次元調和振動子からなる系を考える。系は平衡状態にあるとし、その温度を T とする。これらの調和振動子を古典的に扱うと、N 個の 3 次元調和振動子からなる古典系となる。この系のハミルトニアンは

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 |\vec{r}_i|^2 \right)$$

で与えられる。ただし、$\vec{p}_i$ と $\vec{r}_i$ は i 番目の調和振動子の運動量と位置を表し、m と ω は各調和振動子の質量と角振動数である。以下の問 1、問 2 に答えよ。

問 1. 分配関数 Z を

$$Z = \int \cdots \int \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1 \cdots \mathrm{d}\vec{r}_N \mathrm{d}\vec{p}_1 \cdots \mathrm{d}\vec{p}_N}{h^{3N}} \, \mathrm{e}^{-H/k_{\mathrm{B}}T}$$

で定義する。分配関数 Z が

$$Z = \left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega} \right)^{3N}$$

となることを示せ。必要であれば、以下の積分公式を使ってもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > 0)$$

問 2. エントロピーと熱容量を求めよ。

（次頁に続く）

以下では、これらの調和振動子を量子的に扱う。この場合、系はN個の3次元調和振動子からなる量子系となる。各調和振動子の固有エネルギーは、量子数$\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)$によって

$$E_{\vec{n}}=\hbar\omega\left(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2}\right)$$

で与えられる。ただし、n_x、n_y、n_zはそれぞれ0以上の整数値をとる。すべての調和振動子について量子数$\vec{n}$を指定することでこの量子系の状態が一つ指定され、その状態が持つエネルギーは各調和振動子の固有エネルギーの和で与えられる。以下の問いに答えよ。

問 3. 分配関数を求めよ。

問 4. エントロピーと熱容量を求めよ。

問 5. $k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\omega$の高温極限を考える。問4で求めた量子系のエントロピーが問2で求めた古典系のエントロピーと一致することを示せ。同様に、問4で求めた量子系の熱容量が問2で求めた古典系の熱容量と一致することを示せ。

問 6. 絶対零度の極限でエントロピーが0になることは熱力学第3法則と呼ばれる。問2で求めた古典系のエントロピーが熱力学第3法則と整合するかどうかを示せ。同様に、問4で求めた量子系のエントロピーが熱力学第3法則と整合するかどうかを示せ。

V

[A]

Answer the following questions.

Q1. Consider a system consisting of two subsystems A and B. Suppose the interaction between the subsystems is sufficiently weak and the energy of the whole system is given by the sum of those of the subsystems. Let F_A and F_B be the Helmholtz free energy of the subsystems A and B, respectively. Express the Helmholtz free energy of the whole system using F_A and F_B.

Q2. Let Ξ be the grand partition function of the system following a grand canonical ensemble with the temperature T and chemical potential μ. Letting k_{B} be the Boltzmann constant, we define the inverse temperature as $\beta = (k_{\mathrm{B}}T)^{-1}$. Express the expectation value of the particle number $\langle N \rangle$ of this system using β, μ, and Ξ.

Q3. Select two correct statements from the following.

(a) Pressure and temperature are intensive, and chemical potential is extensive.

(b) When the particle number occupying each energy level is sufficiently small, both Bose and Fermi distributions are well described by the Boltzmann distribution.

(c) If the specific heat at constant volume is positive, the Helmholtz free energy as a function of temperature is convex downward.

(d) In bosonic systems, the Bose-Einstein condensation can take place even when there is no interaction between bosons.

(Continued on the next page)

[B]

Let k_B be the Boltzmann constant and h be the Planck constant. We also use $\hbar = h/2\pi$ in the following.

Consider a system consisting of N three-dimensional harmonic oscillators. The system is assumed to be in equilibrium with the temperature T. Treating these harmonic oscillators classically, we regard the system as a classical system consisting of N three-dimensional harmonic oscillators. The Hamiltonian is given by

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{|\vec{p}_i|^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 |\vec{r}_i|^2 \right),$$

where $\vec{p}_i$ and $\vec{r}_i$ represent the momentum and coordinate of the i-th harmonic oscillator with the mass m and angular frequency ω. Answer the following Q1 and Q2.

Q1. We define the partition function Z by

$$Z = \int \cdots \int \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1 \cdots \mathrm{d}\vec{r}_N \mathrm{d}\vec{p}_1 \cdots \mathrm{d}\vec{p}_N}{h^{3N}} \, \mathrm{e}^{-H/k_\mathrm{B}T}.$$

Prove

$$Z = \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{\hbar\omega} \right)^{3N}.$$

You can use the following formula, if necessary.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > 0).$$

Q2. Find the entropy and the heat capacity.

(Continued on the next page)

In the following, we treat these harmonic oscillators quantum mechanically. The system is then regarded as a quantum system consisting of N three-dimensional harmonic oscillators. The energy eigenvalue of each harmonic oscillator is given by

$$E_{\vec{n}} = \hbar\omega\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right)$$

with a three-dimensional quantum number $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ where n_x, n_y, and n_z are integers greater than or equal to zero. We specify the quantum state of the system by assigning the quantum number $\vec{n}$ to each harmonic oscillator. Then the energy of the system is given by the sum of the energies of these harmonic oscillators. Answer the following questions.

Q3. Find the partition function.

Q4. Find the entropy and the heat capacity.

Q5. Consider the high-temperature limit $k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\omega$. Show that the entropy of the quantum system obtained in Q4 agrees with that of the classical system obtained in Q2. Similarly, show that the heat capacity of the quantum system obtained in Q4 agrees with that of the classical system obtained in Q2.

Q6. The third law of thermodynamics states that the entropy of a system approaches zero as the temperature approaches absolute zero. Show whether the entropy of the classical system obtained in Q2 is consistent with the third law of thermodynamics. Similarly, show whether the entropy of the quantum system obtained in Q4 is consistent with the third law of thermodynamics.