

令和8年度入学

筑波大学大学院入学試験

8月実施

理工情報生命学術院 数理物質科学研究群

物理学学位プログラム 試験問題

専門科目

注意事項（選択、解答についての指示）

Notes (Instructions for selection and solution)

1. 5 つの問題 (I~V) がある。問題 I では最初の説明文を良く読んでから解答せよ。問題 II~V では、基礎問題と応用問題 ([A], [B]) があり、全ての問題に解答せよ。問題文は、最初に日本語で、次に英語で書かれている。問題の内容は同じものである。

There are five problems (I~V). For the problem I, read carefully the explanation in the first page. Each of problems II~V consists of basic and advanced problems ([A], [B]). Answer both of them. All the problems are given first in Japanese and then in English. The contents of the problems are the same.

2. それぞれの問題につき一枚の解答用紙を用いよ。また、問題番号を明記せよ。
Use one sheet of answer paper separately for each problem. Write the problem number at the top of the sheets.
3. 下書き用紙は採点の対象としない。
Draft sheets will not be marked.

I

以下の 10 問のうち 5 問を選択し、問題番号を明記の上、解答せよ。 i は虚数単位を表すものとする。

問 1. 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ。

問 2. 行列

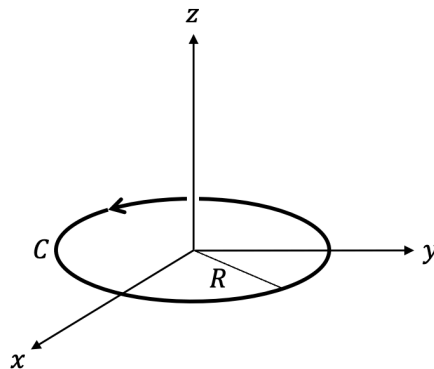
$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値を求めよ。また、それぞれの固有値に対応する、ノルムが 1 となるよう正規化された固有ベクトル（単位固有ベクトル）を求めよ。

問 3. 3次元直交座標 (x, y, z) で定義されたベクトル場 $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x^2, 0)$ に対して、線積分

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

を求めよ。ただし、 C は xy 平面上における原点を中心とした半径 R の円を、図のように z 軸の正の方向から見て反時計回りに一周する経路とする。



(次頁につづく)

問 4. 3次元直交座標 (x, y, z) で定義されたベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ に対して、 \vec{r}/r^2 の発散

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right)$$

を求めよ。ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。

問 5. 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 5e^{3x}$$

問 6. 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

問 7. 次の関数のフーリエ変換を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

問 8. 次の積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$$

問 9. 区間 $-1 \leq x \leq 1$ において、次の方程式を満たす関数 $\phi(x)$ を求めよ。

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\delta(x)$$

ただし、 $\phi(x)$ は区間内で連続であり、 $\phi(-1) = \phi(1) = 0$ を満たす。 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数である。

問 10. 次の積分を極大または極小にする関数 $y(x)$ を求めよ。

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

ただし、 $y(x)$ は滑らかで、 $y(0) = 1$ および $y(1) = 3$ を満たすものとする。

I

Answer five out of the following ten questions. Write down the chosen question numbers on the answer sheet clearly. The imaginary unit is represented by i .

Q1. Find the inverse of the following matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Q2. Find the eigenvalues of the following matrix:

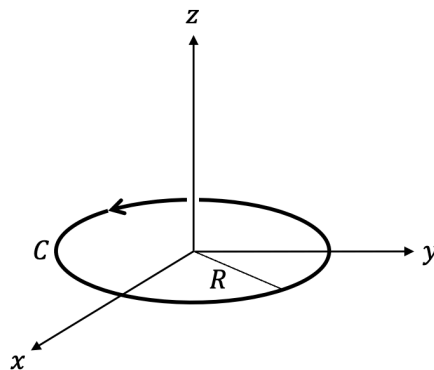
$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

Also, for each eigenvalue, find the corresponding eigenvector that is normalized to have unit norm (i.e., a unit eigenvector).

Q3. Consider the vector field defined in three-dimensional Cartesian coordinates (x, y, z) , $\vec{F}(x, y, z) = (-y, x^2, 0)$. Evaluate the line integral

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

where C is a circle of radius R centered at the origin in the xy -plane, traversed once counterclockwise as viewed from the positive z -axis.



(Continued on the next page)

- Q4. Consider the vector $\vec{r} = (x, y, z)$ defined in three-dimensional Cartesian coordinates (x, y, z) . Evaluate the divergence of \vec{r}/r^2 :

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^2} \right),$$

where $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- Q5. Find the general solution of the following differential equation:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 5e^{3x}.$$

- Q6. Find the general solution of the following differential equation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$$

- Q7. Find the Fourier transform of the following function:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}.$$

- Q8. Evaluate the following integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx.$$

- Q9. Find the function $\phi(x)$ that satisfies the following equation on the interval $-1 \leq x \leq 1$:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\delta(x).$$

Assume that $\phi(x)$ is continuous on the interval and satisfies the boundary conditions $\phi(-1) = \phi(1) = 0$. Here, $\delta(x)$ denotes the Dirac delta function.

- Q10. Find the function $y(x)$ that maximizes or minimizes the following integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx.$$

Assume that $y(x)$ is smooth and satisfies the boundary conditions $y(0) = 1$ and $y(1) = 3$.

II [A]

問 1. 以下の力の中で，中心力であるものを全て挙げよ.

1. 2つの点電荷間に働く静電気力
2. 磁束密度が点電荷に及ぼすローレンツ力
3. 回転座標系でのコリオリ力
4. 摩擦力
5. 2つの質点間に働く重力 (万有引力)

問 2. 以下の様な一様な密度を持つ静止した物体の周囲を質点が重力相互作用により運動するとき，質点の角運動量ベクトルが保存する軌道が存在するものを全て挙げよ.

1. 物体の形状が球の場合.
2. 物体の形状が回転楕円体の場合.
3. 物体の形状が三軸不等楕円体の場合.

問 3. 等しい質量 m をもつ 2つの質点の位置ベクトルをそれぞれ \vec{r}_1 及び \vec{r}_2 とし，2つの質点はそれらの間の距離のみに依存するポテンシャルエネルギー $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ を通じて相互作用しているとき，この系のラグランジアン \mathcal{L} を書け. また，重心系でのラグランジアンを 2つの質点の相対ベクトル $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ を用いて書け.

(次頁につづく)

[B]

図のように、鉛直方向に対して角度 θ ($0 < \theta < \pi/2$) をなし上に開いた円錐状の斜面を離れずに運動する質量 m の質点 P を考える。円錐の頂点を原点 O とし鉛直上向きを z 軸の正の向きとした直交座標系を考える。質点と原点との距離を R とする。また、質点 P を xy 平面に射影した点 Q と原点の間を結ぶ線分 OQ と x 軸のなす角を ϕ とする。重力加速度の大きさは g とし、斜面は十分滑らかで質点と斜面の間の摩擦は無視できるものとする。

問 1. 質点 P の運動エネルギー K

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

と z 軸まわりの角運動量 l_z

$$l_z = m(xy\dot{y} - yx\dot{x})$$

を m , θ , 及び R , ϕ とそれらの時間微分 \dot{R} , $\dot{\phi}$ を用いて表せ。

問 2. 質点 P のラグランジアンを m , θ , 及び R , ϕ とそれらの時間微分 \dot{R} , $\dot{\phi}$ を用いて表せ。

問 3. 質点 P の運動方程式を R 方向と ϕ 方向についてそれぞれ導け。また、 l_z が保存することを示せ。

問 4. 運動エネルギー K を m , l_z , θ 及び R とその時間微分 \dot{R} を用いて表せ。

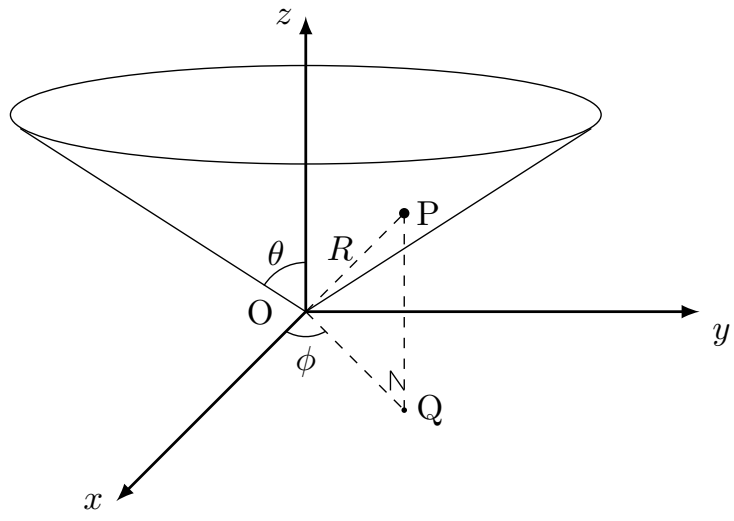
問 5. 質点の力学的エネルギー E は、有効ポテンシャル $U(R)$ を用いて

$$E = \frac{m\dot{R}^2}{2} + U(R)$$

の形で表すことができる。有効ポテンシャル $U(R)$ を R , θ , g , m , l_z を用いて表せ。

問 6. 問 5 で求めた有効ポテンシャルのグラフ（横軸が R , 縦軸が $U(R)$ ）の概略を、 $l_z \neq 0$ の場合について描き、それを用いて質点の軌道が取り得る R の範囲がどのようなになるか述べよ。

(次頁につづく)



☒

II

[A]

- Q1. Of the following, list all the forces that are central forces.
1. Electrostatic force between two point charges
 2. Lorentz force exerted by magnetic flux density on a point charge
 3. Coriolis force in a rotating reference frame
 4. Frictional force
 5. Gravitational force between two point masses
- Q2. When a point mass moves under gravity around a stationary body with uniform density, select all of the cases for the stationary body from the list below, for which there exists a trajectory of the point mass along which the angular momentum vector is conserved.
1. A spherical body
 2. A spheroidal body
 3. A triaxial body
- Q3. Two point masses of equal mass m have position vectors \vec{r}_1 and \vec{r}_2 and interact through a potential energy $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ that depends only on their separation. Write down the Lagrangian \mathcal{L} of this system. Also, express the Lagrangian in the center-of-mass frame using the relative vector $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

(Continued on the next page)

[B]

As shown in the figure, a point mass particle P of mass m moves without leaving the surface of a cone that opens upward at an angle θ with respect to the vertical direction (where $0 < \theta < \pi/2$). Let the apex of the cone be the origin O, and define a Cartesian coordinate system where the vertical direction is the z -axis.

Let R be the distance from the particle to the origin, and let ϕ be the angle between the x -axis and the line connecting the origin and the projection of the particle's position onto the xy -plane, Q.

Assume gravity acts downward with acceleration g , and the cone is so smooth that friction between the particle and the surface is negligible.

Q1. Express the kinetic energy K

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

and the angular momentum ℓ_z about the z -axis

$$\ell_z = m(xy\dot{z} - y\dot{x}z)$$

of the particle P in terms of m , θ , R , ϕ and the time derivatives \dot{R} and $\dot{\phi}$.

Q2. Write down the Lagrangian of the particle P in terms of m , θ , R , ϕ and the time derivatives \dot{R} and $\dot{\phi}$.

Q3. Derive the equations of motion of the particle in the R - and ϕ -directions. Also, show that ℓ_z is conserved.

Q4. Express the kinetic energy K in terms of m , ℓ_z , θ , R and \dot{R} .

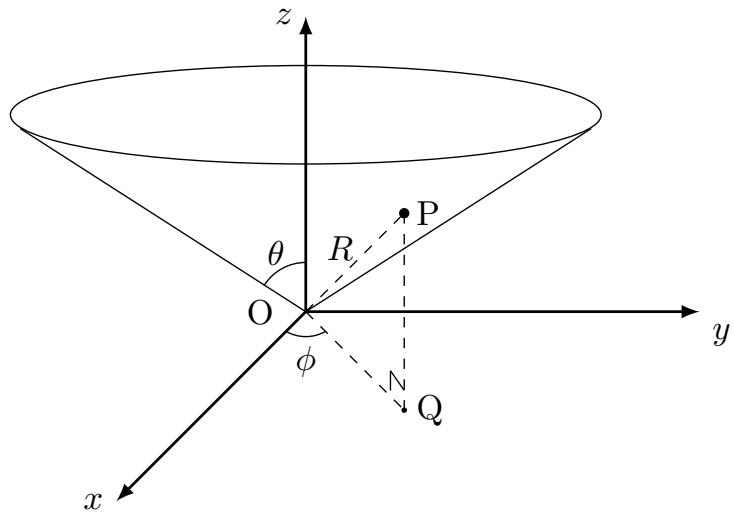
Q5. The total mechanical energy E of the particle P can be written in the form

$$E = \frac{m\dot{R}^2}{2} + U(R).$$

Express the effective potential $U(R)$ in terms of R , θ , g , m , ℓ_z .

Q6. Sketch a rough graph of the effective potential $U(R)$ (horizontal axis: R , vertical axis: $U(R)$) for the case for which $\ell_z \neq 0$. Explain the allowed range in R for the particle's motion using this graph.

(Continued on the next page)



Figure

III.

以下の問 [A]、[B] に答えよ。ただし $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ とし、 h はプランク定数である。

[A]

問 1. 1次元空間 $-\infty < x < \infty$ で正の定数 a を用いて波動関数が $\psi(x) = Ne^{-ax^2/2}$ で与えられるとき、 $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ を満たす規格化因子 N を求めよ。また、この波動関数に対する座標演算子 \hat{x} 、運動量演算子 \hat{p} それぞれの期待値を求めよ。ただし $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ であり、ガウス積分の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いてよい。

問 2. 2電子からなる系を考える。電子のスピンは $1/2$ であり、スピン上向きを \uparrow 、下向きを \downarrow と書くとする。2電子系は $|\uparrow\uparrow\rangle$ 、 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 、 $|\downarrow\uparrow\rangle$ 、 $|\downarrow\downarrow\rangle$ の4つの状態をとる。2電子の合成スピンの値が1となるものを次の選択肢から3つ選べ。また、合成スピンの値が0となるものを次の選択肢から1つ選べ。

選択肢：

- (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$
- (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$
- (3) $|\uparrow\uparrow\rangle$
- (4) $|\downarrow\downarrow\rangle$

問 3. 質量 m の粒子の3次元非等方調和振動子ポテンシャル $V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + 4z^2)$ (ω は正の定数) で与えられる量子力学系を考える。この基底状態、第一励起状態、第二励起状態はそれぞれ何重に縮退しているか。ただし質量 m の粒子の1次元調和振動子ポテンシャル $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ で与えられる量子力学系の固有エネルギーは $E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$ (n は0以上の整数) で与えられる。

(次頁につづく)

[B]

1次元空間で以下のポテンシャル中にある質量 m の粒子の量子力学系を考える (図1参照)。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x \leq 0) \\ -V_0 & (0 < x < a) \\ 0 & (x \geq a) \end{cases}$$

$V_0 > 0$ とし、 $0 < x < a$ を領域 I、 $x \geq a$ を領域 II とする。

まず粒子のエネルギー E が $-V_0 < E < 0$ の場合を考える。 $k_1 \equiv \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}$ 、 $\gamma \equiv \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$ とする。

問 1. 領域 I、領域 II の波動関数の関数形を $x = 0$ および $x \rightarrow \infty$ での境界条件を考慮して表せ。

問 2. $x = a$ で波動関数とその1階微分が連続である条件を用いて k_1 と γ の満たす関係式を示せ。

問 3. 問 2 で導いた関係式と $k_1^2 + \gamma^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$ を用いて $E < 0$ の解が存在するために a 、 m 、 V_0 が満たすべき条件を求めよ。

続いて粒子のエネルギー E が $E > 0$ の場合を考える。 $k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ 、 $k_1 \equiv \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}$ とし、領域 II の波動関数が定数 A と δ を使って $A \sin(kx + \delta)$ と書けるとする。

問 4. $x = a$ での波動関数とその1階微分が連続である条件を用いて $\tan \delta$ を a 、 k 、 k_1 を用いて表せ。

問 5. $E \rightarrow 0$ の極限で $-\frac{1}{k} \tan \delta$ を $k_0 \equiv \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$ と a を用いて表せ。

(次頁につづく)

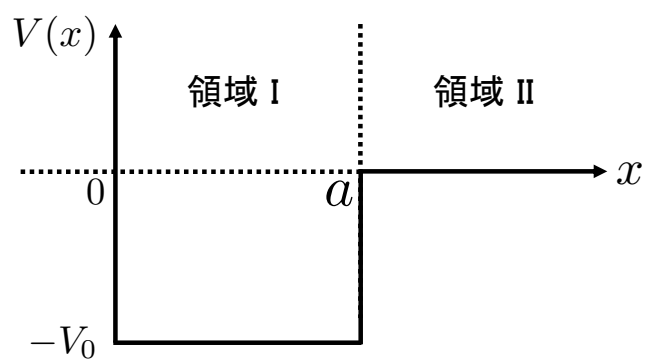


图 1

III.

Answer the following questions [A] and [B]. Let $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, where h is the Planck constant.

[A]

- Q1. When the wave function is given in the form $\psi(x) = Ne^{-ax^2/2}$ in one-dimensional space $-\infty < x < \infty$ using a positive constant a , derive the normalization factor N that satisfies $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$. Then, calculate the expectation values of the coordinate operator \hat{x} and the momentum operator \hat{p} with respect to the above wave function. Note that $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$, and the Gauss integral formula is given by $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.
- Q2. Consider a two-electron system. The electron has spin $1/2$, and its spin-up and spin-down states are denoted as \uparrow and \downarrow , respectively. The two-electron system takes the following four states: $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$, and $|\downarrow\downarrow\rangle$. Choose three states that have a total spin of unity from the following options. Choose one state that has a total spin of zero from the following options.

Options :

- (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$
- (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$
- (3) $|\uparrow\uparrow\rangle$
- (4) $|\downarrow\downarrow\rangle$

- Q3. Consider a quantum mechanical system of a particle with mass m in a three-dimensional anisotropic harmonic-oscillator potential $V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + 4z^2)$, where ω is a positive constant. Write down the degeneracies of the ground state(s), first excited state(s), and the second excited state(s) of this system. Note that the eigenenergy of the quantum mechanical system of a particle with mass m in a one-dimensional harmonic-oscillator potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ is given by $E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$, where n is a non-negative integer.

(Continued on the next page)

[B]

Consider the quantum-mechanical system of a particle with mass m in the one-dimensional potential described below (see Fig. 1)

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x \leq 0) \\ -V_0 & (0 < x < a) , \\ 0 & (x \geq a) \end{cases}$$

where $V_0 > 0$. Let $0 < x < a$ be Region I and $x \geq a$ be Region II.

First, consider the situation in which the energy of the particle E is in the range $-V_0 < E < 0$. Let $k_1 \equiv \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}$ and $\gamma \equiv \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$.

- Q1. Write down the form of the wave functions in Region I and Region II, taking account of the boundary conditions at $x = 0$ and $x \rightarrow \infty$.
- Q2. Derive the relation between k_1 and γ using the condition that the wave function and its first derivative are continuous at $x = a$.
- Q3. Using the relation obtained in Q2 and $k_1^2 + \gamma^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$, derive the condition that a , m , and V_0 must satisfy for the existence of a solution with $E < 0$.

Second, consider the situation in which the energy of the particle E is in the range $E > 0$.

Let $k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ and $k_1 \equiv \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}$, and assume that the wave function in Region II can be written as $A \sin(kx + \delta)$ using constants A and δ .

- Q4. Express $\tan \delta$ in terms of a , k , and k_1 using the condition that the wave function and its first derivative are continuous at $x = a$.
- Q5. Write down $-\frac{1}{k} \tan \delta$ in the limit of $E \rightarrow 0$ in terms of $k_0 \equiv \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$ and a .

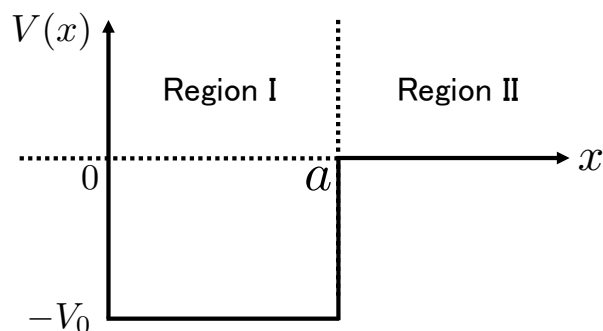


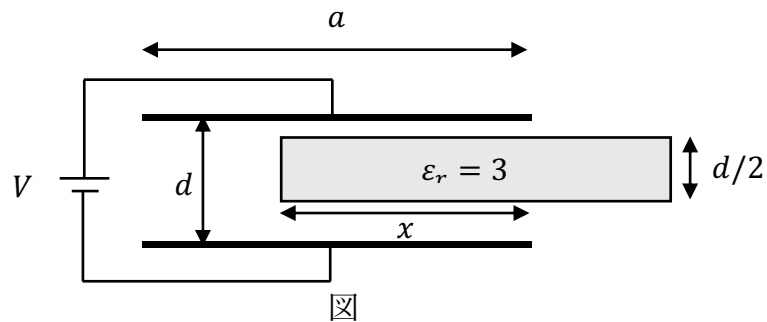
Figure 1

IV

真空の誘電率を ϵ_0 、真空の透磁率を μ_0 とする。以下の問いに答えよ。

[A]

- 問1. 半径 a の無限に長い円柱内に単位長さあたり λ で一様に電荷が分布しているとき、円柱の中心軸から円柱の半径方向に r だけ離れた点に生じる電場の大きさを、 ϵ_0 、 a 、 λ 、 r のうち必要なものを用いて表せ。
- 問2. 下図のように、一辺の長さが a の正方形導体板を間隔 d で平行においたコンデンサーの両極が、電位差 V の電池につながれており、この導体板の間に直方体誘電体を平行に入れることを考える。ただし、コンデンサーは真空中にあり、誘電体の導体板に対向する面は導体板と同形で、厚さは $d/2$ 、比誘電率を $\epsilon_r = 3$ とする。また、コンデンサーの端の影響は無視できるものとする。このとき、以下の問いに答えよ。



- (a) 誘電体が長さ x だけ挿入されたときのコンデンサーの静電容量を、 ϵ_0 、 a 、 d 、 x 、 V のうち必要なものを用いて表せ。
- (b) 誘電体が引き込まれる力の大きさを、 ϵ_0 、 a 、 d 、 x 、 V のうち必要なものを用いて表せ。
- 問3. z 軸方向に一様な静磁場中における点電荷（電荷量 q ）に働くローレンツ力 \vec{F} を計算せよ。ただし、磁束密度を $\vec{B} = (0, 0, B)$ 、点電荷の速度を $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とする。

(次頁につづく)

[B]

電場 \vec{E} の中を運動する電子について、以下の問いに答えよ。ただし、電子の質量および電荷をそれぞれ m および $-e$ 、単位体積中の電子の数を n 、電子の平均速度を \vec{v} とする。また、電子が受けるローレンツ力や電子間の相互作用は無視できるとする。必要に応じて、以下のマクスウェル方程式を用いてもよい。

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

ただし、 \vec{B} は磁束密度、 \vec{j} は電流密度である。

はじめに、電子が導体の中を移動し、イオンと衝突する場合を考える。

問1. イオンとの衝突によって単位時間あたりに電子が失う平均運動量は、そのときの電子の平均運動量に比例し、緩和時間 τ を用いて $m\vec{v}/\tau$ と書けるとする。また、電子の運動は定常状態にあり、 $d\vec{v}/dt = 0$ が成り立つとする。電流密度 \vec{j} についてオームの法則 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ を導き、電気伝導度 σ を ε_0 、 μ_0 、 m 、 e 、 n 、 \vec{v} 、 τ のうち必要なものを用いて表せ。

つぎに、電子が超伝導体の中を移動し、まったく散乱を受けない場合を考える。

問2. オームの法則のかわりに、電流密度 \vec{j} について次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$$

問3. 問2の式を用いて、次式が成り立つことを示せ。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{j} + \frac{ne^2}{m} \vec{B} \right) = 0$$

問4. $\vec{\nabla} \times \vec{j} + \frac{ne^2}{m} \vec{B} = 0$ が成り立つとき、 $\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$ が成り立つことを示し、 $\lambda (> 0)$ を ε_0 、 μ_0 、 m 、 e 、 n 、 \vec{v} の内、必要なものを用いて表せ。ただし、磁場の周波数は十分低く、 $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ は無視できるものとする。必要に応じて、任意のベクトル \vec{A} について成り立つベクトル解析の公式 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$ を用いてもよい。

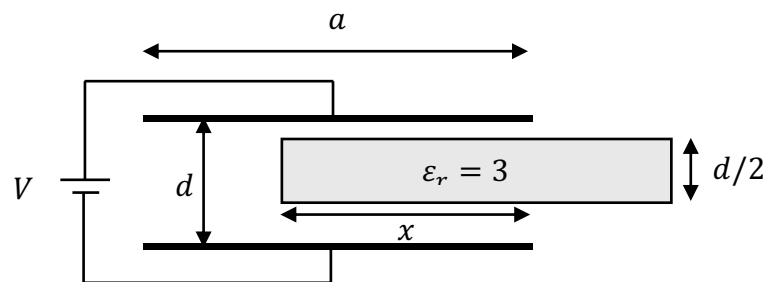
問5. 問4の物理的意味を答えよ。

IV

Answer the following questions. Here, the permittivity and the permeability of the vacuum are denoted by ϵ_0 and μ_0 , respectively.

[A]

- Q1. Consider an infinitely long uniformly-charged cylinder of radius a and electric charge per unit length λ . Let r be the radial distance from the central axis of the cylinder. Find the magnitude of the electric field at a distance r , using ϵ_0 , a , λ , r as required.
- Q2. Consider a rectangular cuboid dielectric inserted parallel to and between two plates of a square parallel-plate capacitor with side length a and spacing d , as shown in the figure below. A voltage V is applied between the two plates. Here, the dielectric is in the vacuum, and the dielectric surfaces facing the plates have the same shape as the plates, and the thickness and the relative dielectric constant of the dielectric are $d/2$ and $\epsilon_r = 3$, respectively. Assume the edge effects of the capacitor are negligible. Answer the following questions.



Figure

- (a) When the dielectric is inserted a length x , find the capacitance using ϵ_0 , a , d , x , V as required.
- (b) Find the magnitude of the attractive force pulling in the dielectric using ϵ_0 , a , d , x , V as required.

(Continued on the next page)

- Q3. Find the Lorentz force \vec{F} acting on a point charge with electric charge q embedded in a uniform static magnetic field in the z -direction. Here, let the magnetic flux density $\vec{B} = (0, 0, B)$ and the velocity of the point charge $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

(Continued on the next page)

[B]

Consider electrons moving in an electric field \vec{E} . Answer the following questions. Here, let mass and electric charge of an electron be m and $-e$, respectively, the number of the electrons in a unit volume be n , and the mean velocity of the electrons be \vec{v} . Moreover, assume the Lorentz force acting on the electrons as well as interactions between the electrons are negligible. Use the following Maxwell's equations as required.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

where \vec{B} and \vec{J} denote the magnetic flux density and the electric current density, respectively.

First, consider a case where the electrons move inside a conductor and collide with ions.

Q1. Assume the mean momentum loss of the electrons per unit time due to collisions with ions is proportional to the mean momentum of the electrons at that time, which can be written as $m\vec{v}/\tau$ with relaxation time τ . Let $d\vec{v}/dt = 0$, that is, assume the motion of the electrons is in a steady state. Derive Ohm's law $\vec{J} = \sigma\vec{E}$ for the electric current density \vec{J} , and find the electric conductivity σ using ε_0 , μ_0 , m , e , n , \vec{v} , τ as required.

Next, consider a case where the electrons move inside a superconductor without scattering.

Q2. Show that, instead of Ohm's law, the following equation holds true for the electric current density \vec{J} .

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}.$$

(Continued on the next page)

Q3. Show that the following equation holds true using the equation given in Q2.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{J} + \frac{ne^2}{m} \vec{B} \right) = 0.$$

Q4. When $\vec{\nabla} \times \vec{J} + \frac{ne^2}{m} \vec{B} = 0$ holds true, show that $\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$ holds true, and find $\lambda (> 0)$ using $\epsilon_0, \mu_0, m, e, n, \vec{v}$ as required. Assume $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ is negligible because the frequency of the magnetic field is sufficiently low. Use the vector analysis formula $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$ for an arbitrary vector \vec{A} as required.

Q5. Explain the physical meaning of Q4.

V.

本問題では、ボルツマン定数を k_B 、温度を T とする。また、逆温度 $\beta = 1/(k_B T)$ の表記を使ってもよい。

[A]

問 1. 以下の文章 (a),(b),(c) のうち正しいものを 1 つ選べ。

- (a) ヘルムホルツの自由エネルギーやギブスの自由エネルギーなどの熱力学ポテンシャルは示量変数どうしの積によって構成される。
- (b) ミクロカノニカル分布に従う系に対し、エネルギーが E である状態数が 2 倍になると、系のエントロピーも 2 倍になる。
- (c) ボース統計に従う粒子は同一の状態をいくつでも占有できるが、フェルミ統計に従う粒子は同一の状態を最大 1 つしか占有できない。

問 2. 理想フェルミ気体でエネルギー ϵ の 1 粒子状態を占める粒子の平均数はフェルミ分布関数 $f(\epsilon)$ で表される。温度 T 、化学ポテンシャル μ のときの $f(\epsilon)$ を書き下せ。また、 $T = 0$ および $T > 0$ における $f(\epsilon)$ の概形をグラフに示せ。

問 3. 以下の系の定積熱容量 C_V を求めよ。

- (1) 内部エネルギーが $U = \chi T - \frac{a}{V}$ (ただし、 χ, a は定数) である体積 V の気体
- (2) 分配関数が $Z = \left(\frac{2\pi k_B T}{A}\right)^N$ (ただし、 A は定数) である N 個の振動子からなる系

(次頁につづく)

[B]

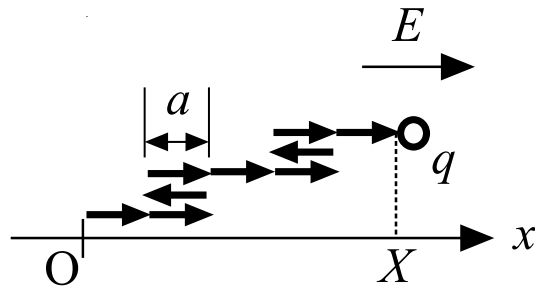


図 1

図 1 のように長さ a の要素が N 個連なった鎖状分子の系を考える。 N 番目の要素の先には電荷 $q(> 0)$ をもつ粒子が付けられている。また x 軸方向に一様な電場 $E(> 0)$ がかけられている。

j 番目 ($j = 1, \dots, N$) の要素は、 x 軸上で正 ($x_j = a$) と負 ($x_j = -a$) の方向の 2 通りの状態のみとれるとする。ただし、 x_j は j 番目の要素の始点から終点への x 座標の増分である。系のエネルギー H は荷電粒子の静電エネルギーのみで、

$$H = -qEX, \quad X = \sum_{j=1}^N x_j \quad (1)$$

で表されるとする。ただし、 X は荷電粒子の x 座標である。(1 番目の要素の始点を原点とする。また、荷電粒子の大きさは無視できるとする。)

この系の温度 T での熱平衡状態をカノニカル分布で考える。以下で $\langle A \rangle$ は A のカノニカル分布での期待値である。

問 1. 要素数 N 、温度 T での分配関数 Z を求めよ。

問 2. エネルギーの期待値 $\langle H \rangle$ が

$$\langle H \rangle = -NqEa \frac{e^{\beta qEa} - e^{-\beta qEa}}{e^{\beta qEa} + e^{-\beta qEa}}$$

で与えられることを示せ。

問 3. 荷電粒子の x 座標の期待値 $\langle X \rangle$ を求めよ。

(次頁につづく)

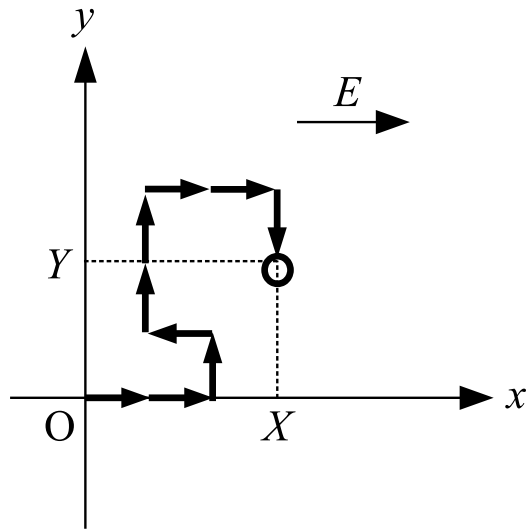


図 2

次に、図2のように系が (x, y) 平面上に置かれ、各要素の始点から終点へのベクトルが $(x_j, y_j) = (a, 0), (-a, 0), (0, a), (0, -a)$ の4つの状態のみをとれる場合を考える。系のエネルギーはこれまでと同様に式 (1) で表されるとする。

問 4. 要素数 N 、温度 T での分配関数 Z を求めよ。

問 5. エネルギーの期待値 $\langle H \rangle$ を求めよ。

問 6. 荷電粒子の y 座標 $Y = \sum_{j=1}^N y_j$ の期待値 $\langle Y \rangle$ と分散 $\langle (Y - \langle Y \rangle)^2 \rangle$ を求めよ。

V.

Let k_B be the Boltzmann constant and T be temperature. You may use the notation of inverse temperature, $\beta = 1/(k_B T)$.

[A]

- Q1.** Which one of the following statements **(a)**, **(b)** or **(c)** is correct?
- (a)** Thermodynamic potentials such as the Helmholtz free energy and the Gibbs free energy are constructed as products of extensive variables.
 - (b)** Consider a system following the microcanonical distribution. When the number of states with energy E doubles, the entropy of the system also doubles.
 - (c)** Any number of particles obeying Bose statistics can occupy the same state, whereas at most one particle obeying Fermi statistics can occupy the same state.
- Q2.** The average number of particles occupying a single-particle state with energy ϵ in an ideal Fermi gas is given by the Fermi distribution function $f(\epsilon)$. Write down $f(\epsilon)$ at temperature T and chemical potential μ . Sketch the general shape of $f(\epsilon)$ on a graph for $T = 0$ and $T > 0$.
- Q3.** Find the constant volume heat capacity C_V of the following systems:
- (1)** A gas with internal energy $U = \chi T - \frac{a}{V}$, where V is the volume, and χ and a are constants.
 - (2)** A system consisting of N oscillators, whose partition function is given by $Z = \left(\frac{2\pi k_B T}{A}\right)^N$, where A is a constant.

(Continued on the next page.)

[B]

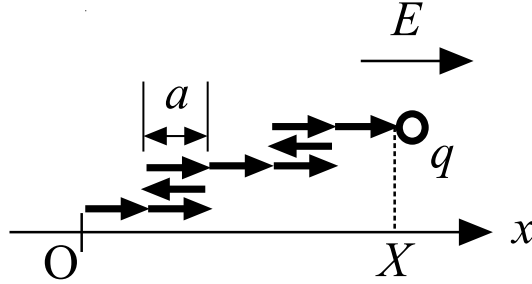


Figure 1

Consider a chain molecule system consisting of N connected elements of length a , as shown in Figure 1. A particle with electronic charge $q(> 0)$ is attached at the endpoint of the N -th element. A uniform electronic field $E(> 0)$ is applied in the x -direction.

Suppose that the j -th ($j = 1, \dots, N$) element can take only two possible states on the x -axis: the positive direction ($x_j = a$) and the negative direction ($x_j = -a$), where x_j is the increment in the x -coordinate from the starting point to the endpoint of the j -th element. The energy H of the system consists only of the electrostatic energy of the charged particle and is expressed as

$$H = -qEX, \quad X = \sum_{j=1}^N x_j, \quad (1)$$

where X is the x -coordinate of the charged particle. (Let the starting point of the first element be at the origin. Also, assume that the size of the charged particle can be neglected.)

Let us consider the thermal equilibrium state of this system at temperature T using the canonical distribution. In the following, $\langle A \rangle$ denotes the expectation value with respect to the canonical distribution.

Q1. Find the partition function Z for N elements at temperature T .

Q2. Show that the expectation value of the energy, $\langle H \rangle$, is given by

$$\langle H \rangle = -NqEa \frac{e^{\beta qEa} - e^{-\beta qEa}}{e^{\beta qEa} + e^{-\beta qEa}}.$$

Q3. Find the expectation value $\langle X \rangle$ of the x -coordinate of the charged particle.

(Continued on the next page.)

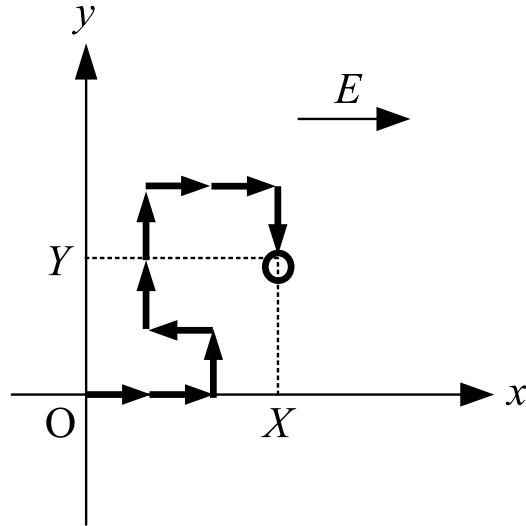


Figure 2

Next, we consider the case in which the system is placed on the (x, y) plane as shown in Figure 2, and the vector from the starting point to the endpoint of each element can take only four possible states: $(x_j, y_j) = (a, 0), (-a, 0), (0, a), (0, -a)$. The energy of the system is assumed to be given by Eq. (1), as before.

- Q4.** Find the partition function Z for N elements at temperature T .
- Q5.** Find the expectation value of the energy, $\langle H \rangle$.
- Q6.** Find the expectation value $\langle Y \rangle$ and the variance $\langle (Y - \langle Y \rangle)^2 \rangle$ of the y -coordinate $Y = \sum_{j=1}^N y_j$ of the charged particle.