令和6年度　8月実施
筑波大学大学院　入学試験
理工情報生命学術院　数理物質科学研究群
物理学学位プログラム　試験問題

専門科目

注意事項（選択、解答についての必要な指示）

1．5つの問題（I~V）がある。問題 I では最初の説明文を良く読んでから解答せよ。問題 II~V では、基礎問題と応用問題（[A], [B]）があり、全ての問題に解答せよ。問題文は、最初に日本語で、次に英語で書かれている。問題の内容は同じものである。

   There are five problems (I~V). For the problem I, read carefully the explanation in the first page. Each of problems II~V consists of basic and advanced problems ([A], [B]). Answer both of them. All the problems are given first in Japanese, and then in English. The contents of the problems are the same.

2．**それぞれの問題につき一枚の解答用紙を用いよ。また、問題番号を明記せよ。**

   Use one sheet of answer paper separately for each problem. Write the problem number at the top of the sheets.

3．下書き用紙は採点の対象としない。

   Draft sheets will not be marked.

I

以下の 10 問のうち 5 問を選択し、問題番号を明記の上、解答せよ。i は虚数単位を表すものとする。

問 1　定積分

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

を求めよ。

問 2　N, n, n' が整数で $0 < N, 0 < n, n' \leq N$ を満たすとするとき、

$$\sum_{m=1}^{N} \sin\left(\frac{\pi n m}{N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n' m}{N+1}\right)$$

を求めよ。

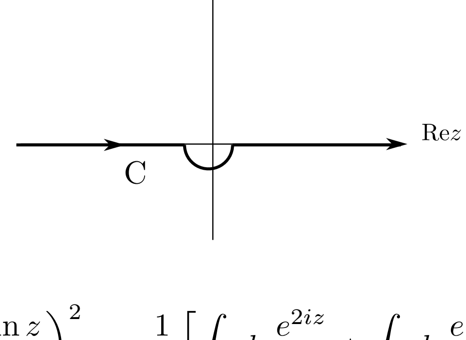
問 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \pi \tag{1}$$

が成立する。これを次のように示そう。左辺の積分は複素積分

$$\int_{\mathrm{C}} dz \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$$

に等しい。ここで、C は下図のように $z = 0$ 付近で実軸から少しずれた経路である。実際、被積分関数は $z = 0$ の付近で極を持たないので、C に沿った積分と実軸に沿った積分は等しい。



$$\int_{\mathrm{C}} dz \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left[\int_{\mathrm{C}} dz \frac{e^{2iz}}{z^2} + \int_{\mathrm{C}} dz \frac{e^{-2iz}}{z^2} - \int_{\mathrm{C}} dz \frac{2}{z^2}\right]$$

として、右辺の各項を計算することにより、(1) を示せ。

(次頁につづく)

問 4　$f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で定義される微分可能な関数で

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

を満たすとする。極限

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\frac{(\sin(tx))^2}{tx^2}$$

を求めよ。ただし、必要であれば問 3 の式 (1) を用いてよい。

問 5　$\vec{A}(\vec{r})$ を 3 次元空間におけるベクトル場とするとき、

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

を $(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$ と $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$ を用いて表せ。

問 6　3 次元直交座標 x, y, z を極座標 r, θ, ϕ で表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

である。ベクトル $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ を

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix},\ \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix},\ \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定義するとき、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$

となることを示せ。

問 7　a, b を 0 でない実数とするとき、方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

で表される 3 次元空間内の曲面を考える。この曲面上の点 $(0, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ においてこの曲面に垂直なベクトルを求めよ。

問 8

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

とするとき、$\exp(\frac{i\alpha}{2}J)$ を計算し、I と J の線形結合で表せ。

(次頁につづく)

問 9　T, V は $N \times N$ 実対称行列とする。今

$$(\lambda T - V)\,\vec{v} = 0$$
$$(\lambda' T - V)\,\vec{v}' = 0$$

を満たす N 次元実ベクトル $\vec{v}, \vec{v}'$ と実数 λ, λ' $(\lambda \neq \lambda')$ があるとする。このとき、

$$\vec{v} \cdot T\vec{v}' = 0$$

となることを示せ。

問 10

$$A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$$

をすべての要素が変数 x で微分可能な関数であるような 2×2 行列とする。$\det A(x) \neq 0$ で、$A(x)$ の逆行列を $A^{-1}(x)$ とする。このとき、

$$\frac{d}{dx} \det A(x) = \det A(x) \mathrm{Tr}\left[A^{-1}(x) \frac{dA(x)}{dx}\right]$$

となることを示せ。

I

Answer five out of the following ten questions. Begin by writing the question numbers on the answer sheet clearly. Here, i is the imaginary unit.

Q1 Evaluate the following integral.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

Q2 Evaluate

$$\sum_{m=1}^{N} \sin\left(\frac{\pi n m}{N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n' m}{N+1}\right) .$$

Here N, n, n' are integers satisfying $0 < N, 0 < n, n' \leq N$.

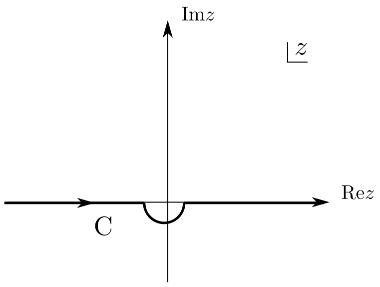
Q3 Let us prove the formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \pi \,. \tag{1}$$

The integral on the left hand side is equal to

$$\int_{\mathrm{C}} dz \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 .$$

Here C is a contour which deviates from the real axis in a neighborhood of $z = 0$ as depicted in the figure below. Since the integrand is holomorphic in a neighborhood of $z = 0$, the integral along C is equal to the one along the real axis.



Prove the formula (1) by using

$$\int_{\mathrm{C}} dz \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left[\int_{\mathrm{C}} dz \frac{e^{2iz}}{z^2} + \int_{\mathrm{C}} dz \frac{e^{-2iz}}{z^2} - \int_{\mathrm{C}} dz \frac{2}{z^2}\right] ,$$

and evaluating each term on the right hand side.

(Continued on the next page)

Q4 Let $f(x)$ be a differentiable function defined for $-\infty < x < \infty$ which satisfies

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0\,.$$

Evaluate the limit

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{(\sin(tx))^2}{tx^2}\,.$$

Here you can use the formula (1) in Q3, if necessary.

Q5 Let $\vec{A}(\vec{r})$ be a vector field in the three dimensional space. Express

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})\,,$$

in terms of $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$ and $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$.

Q6 Three dimensional cartesian coordinates x, y, z can be expressed in terms of the polar coordinates r, θ, ϕ as

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Let $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ be vectors defined by

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Show the following formula holds.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$

Q7 Let a, b be real numbers none of which are 0. Let us consider a surface in the three dimensional space defined by the formula

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1\,.$$

Find a vector perpendicular to this surface at $(0, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ on it.

(Continued on the next page)

Q8 Let I, J be

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Evaluate $\exp(\frac{i\alpha}{2}J)$ and express it as a linear combination of I and J.

Q9 Let T, V be $N \times N$ real symmetric matrices. Suppose that there exist N dimensional real vectors $\vec{v}, \vec{v}'$ and real numbers λ, λ' $(\lambda \neq \lambda')$ satisfying

$$\begin{aligned} (\lambda T - V)\,\vec{v} &= 0 \\ (\lambda' T - V)\,\vec{v}' &= 0\,. \end{aligned}$$

Show that

$$\vec{v} \cdot T\vec{v}' = 0$$

holds.

Q10 Let

$$A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$$

be a 2×2 matrix whose elements are differentiable functions of x. Assume that $\det A(x) \neq 0$ and $A^{-1}(x)$ denotes the inverse matrix of $A(x)$. Show that

$$\frac{d}{dx}\det A(x) = \det A(x)\mathrm{Tr}\left[A^{-1}(x)\frac{dA(x)}{dx}\right]$$

holds.

II

[A]

問 1. (a) 質量 M の剛体を考える。重心を通る軸のまわりの慣性モーメントを I_G とする。その軸と平行で、距離 ℓ だけ離れた軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

(b) 密度が一様で厚さの無視できる質量 M、半径 a の円板を考える。円板の中心を通り、円板面に垂直な軸のまわりの慣性モーメントは $Ma^2/2$ である。その軸と直交し、円板の中心を通る軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

問 2. 原点 O を中心とする中心力の下で運動する質点を考える。原点 O を始点とする質点の位置ベクトルを $\vec{r}$、運動量を $\vec{p}$ とする。角運動量 $\vec{r}\times\vec{p}$ が保存することを示せ。

問 3. 位置ベクトル $\vec{r}$ における力 $\vec{F}(\vec{r})$ が次式を満たすとする：

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r})=0.$$

$\vec{\nabla}$ は微分演算子ナブラである。上の式を満たす力 $\vec{F}$ を何と呼ぶか答えよ。摩擦力は力 $\vec{F}$ に分類されるかどうか答えよ。

（次頁につづく）

[B]

以下の問いでは変数 X の時間に関する 1 階微分を $\dot{X}$、2 階微分を $\ddot{X}$ と表す。

重力の下で運動する質量 m の質点を考える。質点は一平面内を運動するものとし、その平面を xy 面とする。ある時刻における質点の座標を (x,y) とする。重力加速度（大きさ g）は y 軸の負の方向を向き、位置エネルギーの原点は $y=0$ である。空気抵抗は無視できるとする。

問 1. 質点のラグランジアン $\mathcal{L}_0$ を書き下せ。

次に、図 1 のように原点 O を中心とする半径 a の輪が xy 面内に固定されているとする。質量 m の質点を輪の頂上にそっと置いたところ、質点は輪に沿ってすべり、ある高さで輪から離れた。質点と輪の間の摩擦は無視できるとして以下の問いに答えよ。

問 2. 質点が輪に沿ってすべっている時の座標を (x,y) とする。力学的エネルギーの保存則を表す式を記せ。

質点が輪に沿ってすべっている時の座標 (x,y) は以下の条件を満たす必要がある：

$$x^2+y^2=a^2. \tag{1}$$

そこで、問 1 で求めた $\mathcal{L}_0$ を用いて新たにラグランジアン $\mathcal{L}$ を導入する：

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\lambda(x^2+y^2-a^2). \tag{2}$$

λ はラグランジュの未定乗数である。以下の問いに答えよ。

問 3. (2) 式から下の運動方程式を導け。

$$m\ddot{x}=2\lambda x \tag{3}$$

$$m\ddot{y}+mg=2\lambda y \tag{4}$$

問 4. 問 2 の結果と (1)、(3)、(4) 式を用いて λ を y の関数として表せ。(1) 式から導かれる式

$$\dot{x}^2+x\ddot{x}+\dot{y}^2+y\ddot{y}=0$$

を用いて良い。

問 5. 質点が輪から離れる時の y 座標を求めよ。

（次頁につづく）

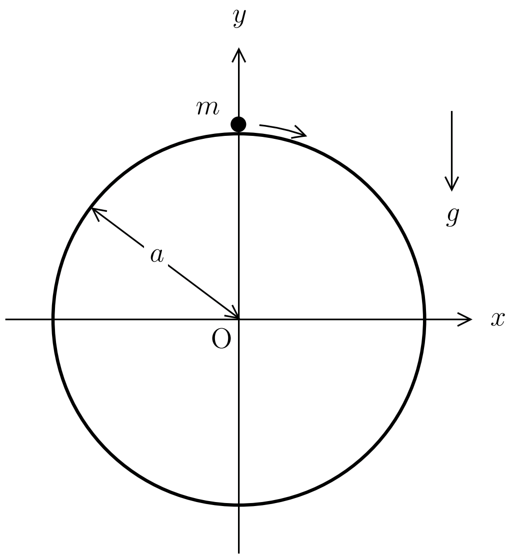


図 1

II

[A]

Q1. (a) Consider a rigid body of mass M. Let I_G be the moment of inertia about an axis through the center of gravity. Find the moment of inertia about an axis parallel to that axis and separated by ℓ.

(b) Consider a uniform and thin disk of radius a and mass M. The moment of inertia about an axis perpendicular to the disk and through the center of the disk is $Ma^2/2$. Find the moment of inertia about an axis parallel to the disk and through the center of the disk.

Q2. Consider a point mass moving under a central force. The center of force is located at the origin O. Let $\vec{r}$ be the position of the point mass measured from O, and $\vec{p}$ be the momentum. Show that the angular momentum $\vec{r} \times \vec{p}$ is conserved.

Q3. Suppose that force $\vec{F}$ at position $\vec{r}$ satisfies the following equation :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0.$$

$\vec{\nabla}$ is the differential operator, nabla. Answer what the force $\vec{F}$ above is called. Answer whether or not the friction force is classified into $\vec{F}$.

[B]

In the following questions, $\dot{X}$ and $\ddot{X}$ denote the first and second derivatives of a variable X with respect to time, respectively.

Consider a point mass of mass m moving under the gravitational force. Let the point mass move on a plane, and the plane be xy plane. And let (x, y) be the coordinate of the point mass at some instant. The direction of the gravitational acceleration (magnitude g) is the negative direction of y axis. The potential energy is zero at $y = 0$, and any effects due to air resistance can be ignored.

Q1. Write down the Lagrangian $\mathcal{L}_0$ of the point mass.

(Continued on the next page)

Next consider a ring of radius a, which is fixed on the x-y plane with the center of the ring located at the origin O, as shown in fig.1. Suppose that a point mass of mass m is placed at the top of the ring. Suppose also that the point mass then slides on the ring, and leaves the surface of the ring at a certain height. The friction between the point mass and the surface of the ring can be ignored. Answer the following question.

Q2. Let (x, y) be the coordinate of the point mass during sliding. Write down an equation expressing the mechanical energy conservation.

The coordinate (x, y) of the point mass during sliding must satisfy the following condition:

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{1}$$

To take account of eq.(1), let us introduce a new Lagrangian $\mathcal{L}$ by using $\mathcal{L}_0$ (Q1):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \lambda(x^2 + y^2 - a^2), \tag{2}$$

where λ is Lagrange's undetermined multiplier. Answer the following questions.

Q3. Derive the following equations of motion from eq.(2).

$$m\ddot{x} = 2\lambda x \tag{3}$$

$$m\ddot{y} + mg = 2\lambda y \tag{4}$$

Q4. Use the result of Q2, eq.(1), eq.(3), and eq.(4) to find λ as a function of y. The following equation derived from eq.(1) can be used:

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0.$$

Q5. Find the y coordinate at which the point mass leaves the surface of the ring.

(Continued on the next page)

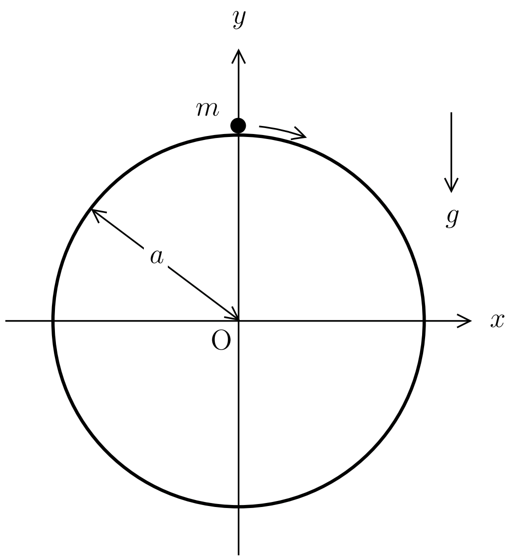


Fig.1

Ⅲ

[A]

問 1. 複素正方行列 A のエルミート共役 ${}^t\mathrm{A}^*$ を $\mathrm{A}^\dagger$ と表す。ここで ^{t} は転置、* は複素共役を表す。$\mathrm{A}^\dagger = -\mathrm{A}$ の時、A は反エルミート行列であるという。反エルミート行列の固有値は 0 または純虚数であることを証明せよ。

問 2. 波動関数が $\psi(x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}a)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx}$ で与えられるガウス型波束がある。ここで a は正の実数であり、k は実数である。この波動関数に対する運動量演算子の期待値 $\langle \hat{p} \rangle$ を求めよ。ただし、$\hat{p}$ は $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ である。また必要であれば、ガウス積分の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = \sqrt{\pi}a$ を用いてよい。

問 3. 電子の運動エネルギーの期待値が $E = 100$ eV であり、$\Delta E = 0.01$ eV の揺らぎを持っている。この時、電子の運動量 p はどの程度の不確かさ Δp で決まるか求めよ。さらに、電子の位置 x はどの程度の不確かさ Δx で決まるか求めよ。ハイゼンベルグの不確定性原理は $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ である。ただし電子の質量は $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg、1 eV$= 1.60 \times 10^{-19}$ J (=kg·m^2·s^{-2})、$\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ Js、$\sqrt{29} \simeq 5.4$ を用いてもよい。

(次頁につづく)

[B]

孤立したスピン量子数 s =1/2 をもつ粒子が静止している。この粒子のスピン演算子の x, y, z 成分はそれぞれ

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x,\ \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y,\ \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

と表されるものとする。ここで、σ_x，σ_y，σ_zはパウリ行列であり

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表される。また、$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とする。

この粒子の時刻 t における状態$|\phi(t)\rangle$は$a_0(t)$，$a_1(t)$を用いて

$$|\phi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{pmatrix},\ \langle\phi(t)| = (a_0^*(t), \quad a_1^*(t))$$

と表される。時刻 t=0 において$a_0(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_1(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$であった。

問1.　$\sigma_x{}^2 = I$であることを用いて、$e^{i\theta\sigma_x} = I\cos\theta + i\sigma_x \sin\theta$であることを示せ。

問2.　時刻$t = 0$における$\hat{S}_x$，$\hat{S}_y$，$\hat{S}_z$の期待値を求めよ。

時刻$t = 0$において z 軸に平行な磁場を印加した。磁場の z 成分をB_0とし、この系のハミルトニアンが$\hat{H}_1 = -\frac{g\mu_B}{\hbar}\hat{S}_z B_0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z$と表わされるものとする。ただし、$\mu_B$はボーア磁子、$g$は$g$-因子であり、$\omega = \frac{g\mu_B}{\hbar}B_0$ とおいた。以下、$\omega > 0$として必要であればωを用いて答えよ。

問3.　時間依存シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d|\phi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_1|\phi(t)\rangle$$

から、$a_0(t)$，$a_1(t)$に関する微分方程式を導け。

問4.　初期条件を課して上記の微分方程式を解け。

（次頁につづく）

問5.　　時刻$t_1 = \frac{\pi}{\omega}$の時、$\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$の期待値を求めよ。また、$\langle\phi(t_1)|\phi(0)\rangle$ を求めよ。

次に時刻$t = t_1$において z 軸に平行な磁場を取り除いた後、時刻$t > t_1$において y 軸に平行な磁場を印加した。磁場の y 成分をB_0とし、この系のハミルトニアンが$\hat{H}_2 = -\frac{g\mu_B}{\hbar}\hat{S}_y B_0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_y$と表わされるとする。

問6.　　時刻$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\omega}$の時、$\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$の期待値を求めよ。また、$\langle\phi(t_2)|\phi(0)\rangle$ を求めよ。

Ⅲ

[A]

Q1. Let $\mathrm{A}^\dagger$ be a Hermitian conjugate ${}^t\mathrm{A}^*$ of a complex square matrix A, where ^{t} and * represent transpose and complex conjugate, respectively. When $\mathrm{A}^\dagger = -\mathrm{A}$, the matrix A is called anti-Hermitian matrix. Prove that eigenvalues of the anti-Hermitian matrix are 0 or pure imaginary.

Q2. A gaussian wave packet $\psi(x)$ is given as $\psi(x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}a)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}+ikx}$. Let a and k be a positive real number and a real number, respectively. Calculate the expectation value $\langle \hat{p} \rangle$ of the momentum operator $\hat{p}$ for the wave packet. Let $\hat{p}$ be $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. If necessary, use the following formula of Gaussian integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = \sqrt{\pi}a$.

Q3. The expectation value of kinetic energy of an electron is $E = 100$ eV, and its fluctuation is $\Delta E = 0.01$ eV. Then, calculate uncertainty Δp of the kinetic momentum p of the electron. In addition, calculate uncertainty Δx of the position x of the electron. Heisenberg uncertainty principle is $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. If necessary, use electron mass $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, 1 eV$= 1.60 \times 10^{-19}$ J (=kg·m^2·s^{-2}), $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ Js, and $\sqrt{29} \simeq 5.4$.

(Continued on the next page)

[B]

Consider an isolated particle at rest with spin quantum number s=1/2. Suppose x, y, z components of the particle spin operators are given by

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x,\ \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y,\ \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z,$$

where σ_x, σ_y, σ_z are the Pauli matrices as given by

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

We suppose the identity matrix is given by $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, and the state of this particle at time t $(|\phi(t)\rangle)$ is given by

$$|\phi(t)\rangle = \begin{pmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \end{pmatrix},\ \langle\phi(t)| = (a_0^*(t),\quad a_1^*(t)),$$

using $a_0(t)$ and $a_1(t)$. We suppose $a_0(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_1(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ at $t = 0$.

Q1. Show that $e^{i\theta\sigma_x} = I\cos\theta + i\sigma_x \sin\theta$ by using ${\sigma_x}^2 = I$.

Q2. Obtain expectation values of $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, and $\hat{S}_z$ at time $t = 0$.

A magnetic field parallel to the z-axis is applied at $t = 0$. The Hamiltonian of the system is given by

$$\hat{H}_1 = -\frac{g\mu_B}{\hbar}\hat{S}_z B_0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z,$$

where B_0 is the z-component of the magnetic field, μ_B is the Bohr magneton, g is the g-factor. We set $\omega = \frac{g\mu_B}{\hbar}B_0$ and assume $\omega > 0$. In the followings, use ω if necessary.

Q3. Derive the differential equations for $a_0(t)$ and $a_1(t)$ from the time-dependent Schrödinger equation

$$i\hbar\frac{d|\phi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_1|\phi(t)\rangle.$$

Q4. Solve the above differential equations, imposing the initial conditions.

Q5. Obtain expectation values of $\hat{S}_x$ and $\hat{S}_y$ at time $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$, and obtain $\langle\phi(t_1)|\phi(0)\rangle$.

Next, after removing the magnetic field parallel to the z-axis at time $t = t_1$, a magnetic field parallel to the y-axis is applied at time $t > t_1$. The Hamiltonian of the system is given by

$$\hat{H}_2 = -\frac{g\mu_B}{\hbar}\hat{S}_y B_0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_y,$$

where B_0 is the y-component of the magnetic field.

Q6. Obtain expectation values of $\hat{S}_x$ and $\hat{S}_y$ at time $t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\omega}$, and obtain $\langle\phi(t_2)|\phi(0)\rangle$.

IV.

[A]

以下の各問いで指示されたグラフとして正しいものを、次頁に与えられている選択肢 (1)–(8) の中から選べ。グラフの縦軸の値は、$r/R=\infty$ でゼロとなり、$r/R=1$ で 1 となるように規格化されている。

問１．次の２つの場合に、それぞれの中心からの距離 r の関数として電場の強度を描いたグラフ。

(a)　真空中にある一様に正に帯電した半径 R の球

(b)　真空中にある一様に正に帯電した半径 R の球殻

問２．次の３つの場合に、それぞれの中心からの距離 r の関数として静電ポテンシャルを描いたグラフ。ポテンシャルは $r/R=\infty$ でゼロとする。

(a)　問１ (a) の球

(b)　問１ (b) の球殻

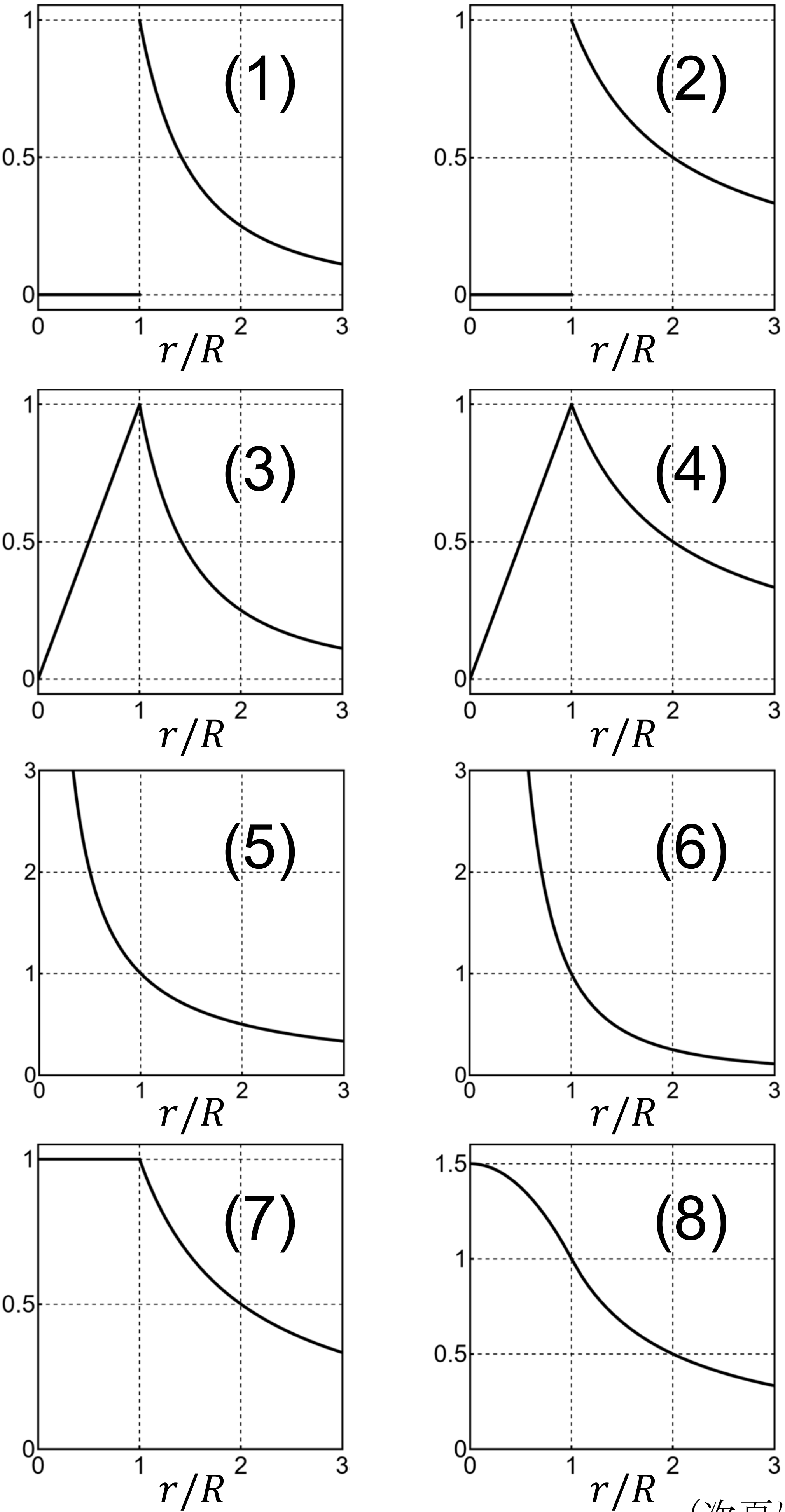
(c)　真空中で $r=0$ に置かれた正の点電荷

問３．真空中に置かれた半径 R の導体球を正に帯電させた場合の静電ポテンシャルを中心からの距離 r の関数として描いたグラフ。ポテンシャルは $r/R=\infty$ でゼロとする。

問４．半径 R の円柱状の無限に長い非磁性の導線が真空中に置かれ、内部を一様な密度の電流が円柱の軸の方向に流れているとき、導線の中心軸からの距離 r の関数として磁束密度の大きさを描いたグラフ。

（次頁につづく）

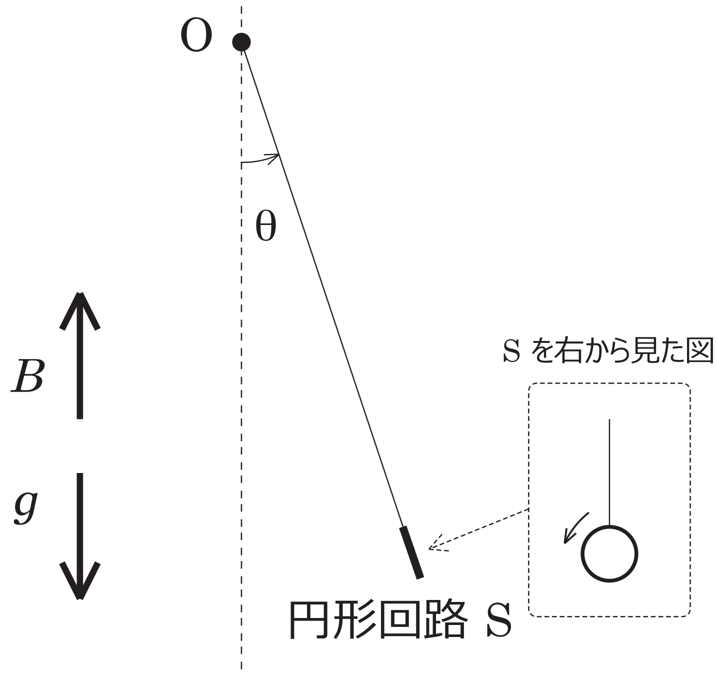
選択肢



（次頁につづく）

[B]

質量 m、有限の抵抗 R の導線のつくる面積 A の小さな円形回路 S がある。これを鉛直上向きの一様な磁束密度 B が存在する空間内で、絶縁された質量の無視できる長さ ℓ の細い棒の先端に固定して摩擦や空気抵抗のない振り子にする。振り子の支点は S とは反対側の棒の先端（点 O）であり、回路 S の法線方向は S の速度の方向と常に平行である。S の大きさは棒の長さに比べて十分に小さい。重力加速度の大きさを g として、以下の問いに答えよ。



図

問１．図のように時刻 t において振り子が鉛直線と角度 $\theta(t)$ をなすとき、回路 S を貫く磁束を求めよ。図において、S の左側の面から右側の面に貫く磁束を正とする。

問２．回路内の磁束変化によって生じる起電力を角速度 $d\theta/dt$ を使って書け。図の破線の枠内に描かれた回路 S を右側から見た図に示された矢印の向きに誘導電流を発生させる起電力を正とする。また、振り子の運動の範囲は十分に小さく（$|\theta| \ll 1$）、$\cos\theta \simeq 1$ の近似が成り立つものとする。

（次頁につづく）

問３．問２で求めた起電力によって回路に流れる電流が行う仕事率（電力）P_1 を角速度 $d\theta/dt$ を使って書け。

問４．$\theta(t)$ が従う運動方程式を書け。なお、誘導電流が磁場から受ける力によって振り子には正味のトルクが生じるが、このトルクを発生させる力を F とおくと、その仕事率 P_2 は

$$P_2 = F\ell\frac{d\theta}{dt}$$

と書くことができ、$P_1 = -P_2$ から F が求まる。また、$|\theta| \ll 1$ なので、$\sin\theta \simeq \theta$ の近似が成り立つものとする。

問５．振り子が $\theta \neq 0$ の位置から周期的振動をともなった運動（減衰振動）を行うための条件式を書け。また、このときに失われる振り子の力学的エネルギーは何に変化しているかを書け。

IV.

[A]

For each of the following questions, choose graphs from the list of options (1)$-$(8) given in the next page, and show appropriate ones which are specified in the questions. The vertical-axis values in the graphs are always zero at $r/R = \infty$, and are normalized to unity at $r/R = 1$.

Q1. A graph that plots electric-field strength as a function of the distance r from the center in each of the following two cases.

(a) A sphere with a radius R which is positively and uniformly charged in vacuum.

(b) A sphere surface shell with a radius R which is positively and uniformly charged in vacuum.

Q2. A graph that plots electric potential as a function of the distance r from the center in each of the three cases below. The potentials are always assumed to be zero at $r/R = \infty$.

(a) The sphere in Q1 (a).

(b) The sphere surface shell in Q1 (b).

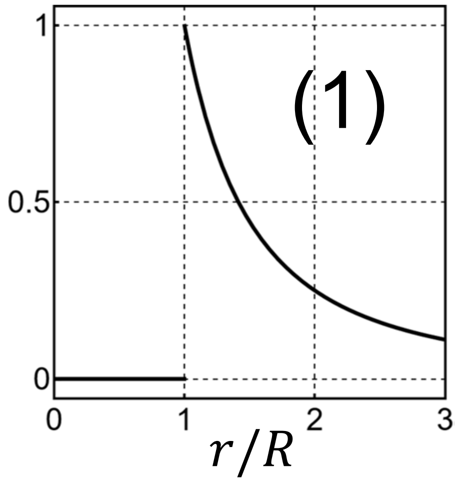
(c) A positive point charge placed at $r = 0$ in vacuum.

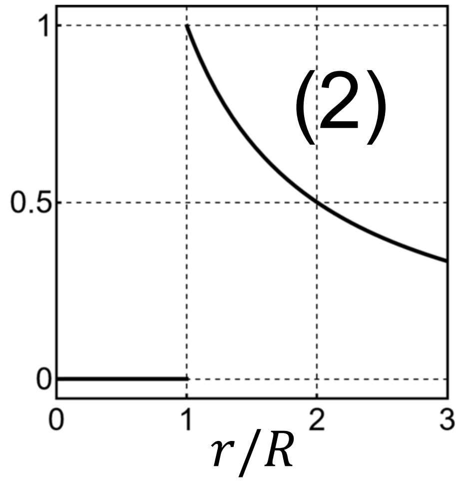
Q3. A graph that plots electric potential as a function of the distance r from the center of a conductive sphere with a radius R which is positively-charged and placed in vacuum. The potential is assumed to be zero at $r/R = \infty$.

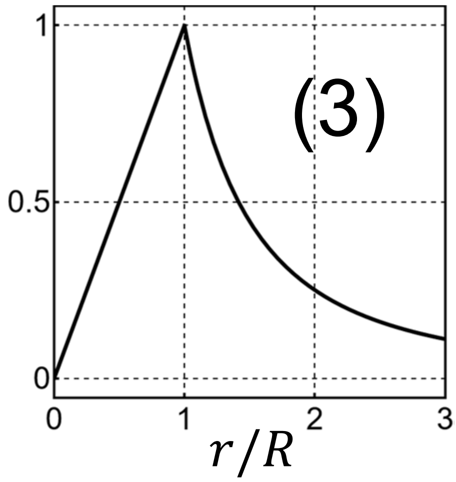
Q4. A graph that plots magnetic-flux-density strength around a non-magnetic cylindrical conducting wire with a radius R as a function of the distance r from the central axis. We assume that there is uniform current along the axis inside the wire. The wire is placed in vacuum, and has infinite length.

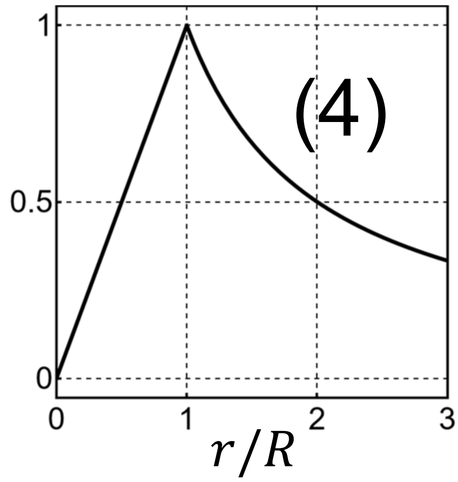
(Continued on the next page)

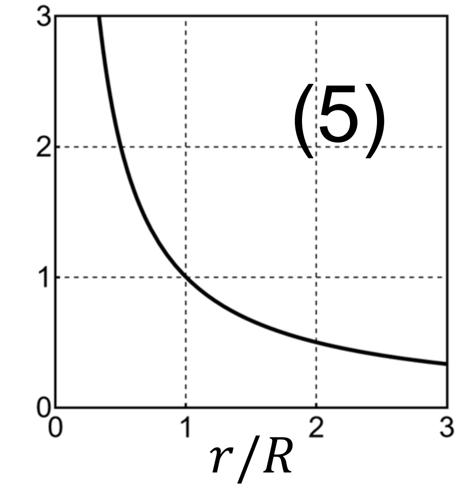
List of options

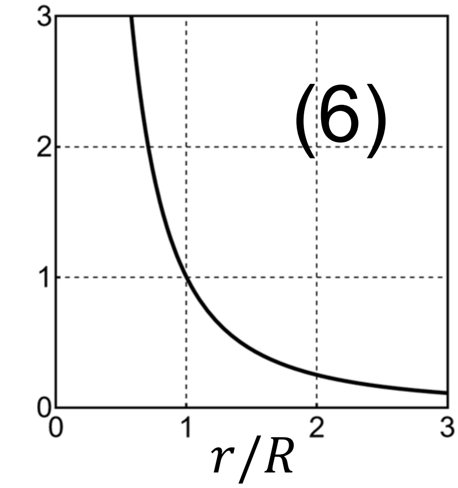


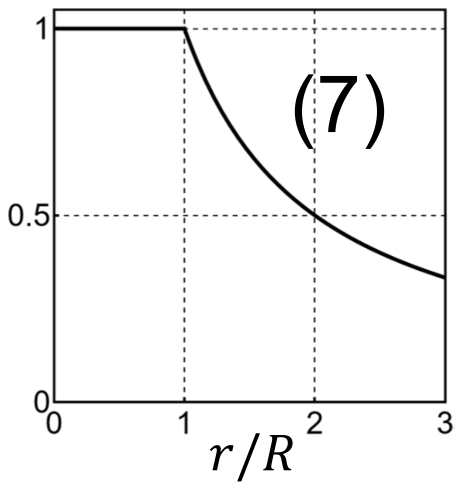


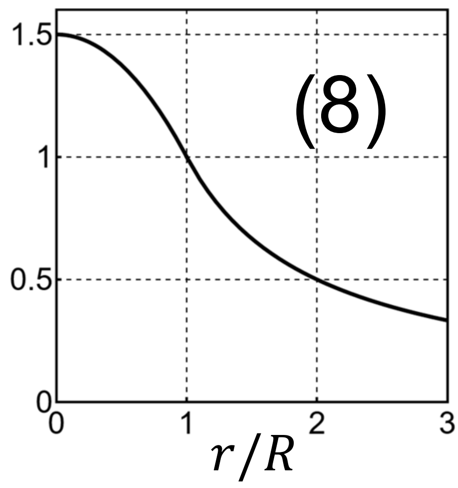








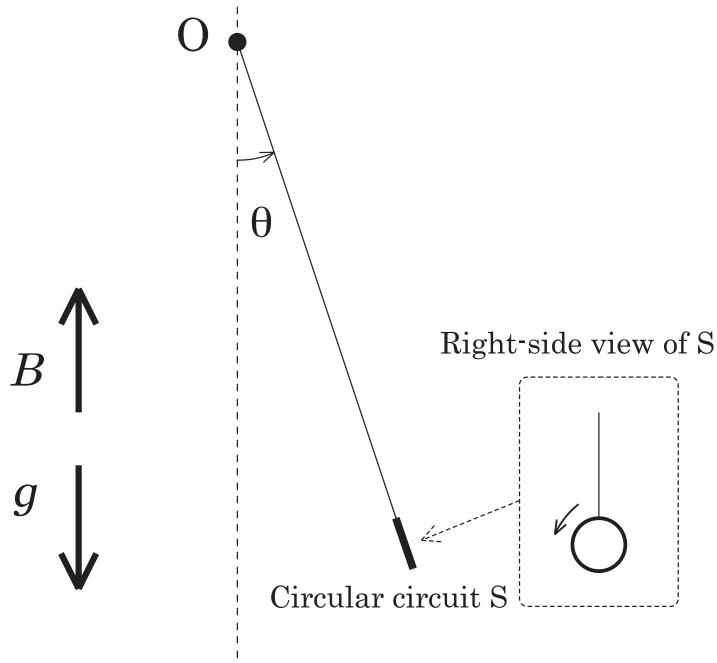




(Continued on the next page)

[B]

We consider a small circular circuit S of a conducting wire with mass m and finite resistance R. It has an area of A. This circuit is fixed at one edge of a thin insulating rod with length ℓ and negligible mass. We regard it as a pendulum without friction or air resistance placed in the space of uniform magnetic-flux density B with vertical upward direction. The pivot point of the pendulum is the other edge O of the rod, which is opposite from S. The normal direction of the circular circuit S is always parallel to the direction of the velocity of S. The size of S is negligibly small as compared to the length of the rod. The magnitude of the acceleration of gravity is g. Answer the following questions.



Figure

Q1. As shown in the figure, we define the angle between the pendulum and the vertical axis as $\theta(t)$ at time t. Find the magnetic flux penetrating the circuit S at the time t. We assume the magnetic flux to be positive when it is penetrating from the left side of S to the right in the figure.

(Continued on the next page)

Q2. Express the electromotive force generated by the temporal change of the magnetic flux penetrating the circuit S by using the angular velocity $d\theta/dt$. We assume the electromotive force to be positive when it is inducing current along the direction of the arrow depicted in the right-side view of the circuit S shown in the dashed square in the figure. The range of the motion of the pendulum is very small $(|\theta| \ll 1)$, and we can use the approximation $\cos\theta \simeq 1$.

Q3. Express the electric power P_1 which is done by the current induced in the circuit by the electromotive force obtained in Q2 by using the angular velocity $d\theta/dt$.

Q4. Write the equation of motion which describes the dynamics of $\theta(t)$. The interaction between the induced current in S and the magnetic field gives rise to a net torque in the pendulum. When we define the force which generates this torque to be F, its power P_2 can be expressed as

$$P_2 = F\ell\frac{d\theta}{dt},$$

and we can find F from the relation $P_1 = -P_2$. We can also use the approximation $\sin\theta \simeq \theta$ since $|\theta| \ll 1$ holds.

Q5. Write the expression which describes the condition for the periodic motion (damped oscillation) of the pendulum from an initial position $\theta \neq 0$. In addition, write what the dynamical energy of the pendulum lost in this damped oscillation becomes altered to.

V

[A]

分配関数 $Z(T,V)$, 温度 T, 体積 V でヘルムホルツの自由エネルギーF が以下の式で表されるとする。

$$F = -k_{\mathrm{B}} T \log Z(T,V)$$

ここで k_{B} はボルツマン定数である。この系における問 1 から問 3 の量を $Z(T,V)$を用いて表せ。尚、解答の中に偏微分 $\partial / \partial T$ 等が残っても良い。

問1.　エントロピーS

問2.　圧力 P

問3.　ギブスの自由エネルギーG

（次頁に続く）

[B]

温度と圧力が等しい2種類の理想気体からなる気体の混合を考える。温度 T, 体積 V, 分子数 N, 質量 m の理想気体の分配関数 Z は

$$Z = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{2\pi m k_\mathrm{B} T}{h^2}\right)^{\frac{3N}{2}}$$

で表される。ここで k_B はボルツマン定数、h はプランク定数である。また、Nは十分に大きいとする。

以下では、それぞれ N_1 個、N_2 個の質量 m_1、m_2 の分子からなる、体積 V_1, V_2 の２種類の理想気体があるとする。２種類の理想気体の温度は T とする。N_1、N_2 は十分に大きいとする。

問1. この２種類の気体が分離されて別々にあるときの分配関数 Z_1, Z_2 と混合されて体積 $V=V_1+V_2$ になった時の分配関数 Z_{1+2} をそれぞれ求めよ。

問2. N_1 個の質量 m_1 の分子からなる、体積 V_1 の気体のエントロピーS_1 が以下で表されることを示せ。

$$S_1 = \frac{3}{2}N_1 k_B + N_1 k_B \log V_1 + \frac{3}{2}N_1 k_B \log T + \frac{3}{2}N_1 k_B \log\frac{2\pi m_1 k_\mathrm{B}}{h^2} - k_B \log N_1!$$

問3. この２種類の気体が分離されて別々にあるときのエントロピーと混合されて体積 $V=V_1+V_2$ になった時のエントロピーの差ΔS を書け。

問4. ２種類の気体の混合過程が不可逆過程であることを説明せよ。また $V_1=V_2=V/2$、$N_1=N_2=N/2$ のときのΔS を書け。

問5. 2 種類の気体が同じ種類の場合、混合してもエントロピーが変わらないことを示せ。スターリングの公式 $\log N! = N\log N - N$ を用いても良い。

問6. この２種類の気体の混合によるエントロピー変化ΔS を熱力学のエントロピーを使って計算することを考える。計算には、この混合プロセスを可逆の準静的過程の組み合わせに置き換える必要がある。置き換えた準静的過程の各プロセスを示し、気体定数を R、アボガドロ数を N_A として熱力学のエントロピーを使ってΔS を計算せよ。

V

[A]

Answer the following questions.

The Helmholtz free energy, F, of volume V at Temperature T is given by

$$F = -k_B T \log Z(T, V) \,,$$

where $Z(T, V)$ is the partition function and k_B is the Boltzmann constant. Write down the following quantities Q1, Q2 and Q3 using $Z(T,V)$. The answer can include partial derivatives such as $\partial / \partial T$ etc.

Q1. Entropy, S.

Q2 Pressure, P.

Q3 Gibbs free energy, G.

(Continued on the next page)

[B]

Consider a mixture of two kinds of ideal gases consisting of independent molecules. Answer the following questions.

For N molecules each with mass m in a box of volume V at temperature T, show that the partition function Z is given by

$$Z = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}{h^2}\right)^{\frac{3N}{2}} ,$$

where k_{B} is the Boltzmann constant, h is the Plank constant, and N is sufficiently large value.

In the following, there are two kinds of monoatomic ideal gases with volume V_1 and V_2. The masses of molecules of the two gases are m_1 and m_2 and number of their molecules are N_1 and N_2 respectively. N_1 and N_2 are sufficiently large values. The temperature of the two gases are T.

Q1 Show the partition functions Z_1 and Z_2 for each of two kinds of gases. The two gases with volume V_1 and V_2 are mixed. A total volume is $V=V_1+V_2$. Show that the partition function, Z_{1+2}, of the mixture.

Q2 Show that the entropy of S_1 for N_1 molecules with mass m_1 in a box of volume V_1 is given by

$$S_1 = \frac{3}{2} N_1 k_B + N_1 k_B \log V_1 + \frac{3}{2} N_1 k_B \log T + \frac{3}{2} N_1 k_B \log \frac{2\pi m_1 k_{\mathrm{B}}}{h^2} - k \log N_1!.$$

Q3 Write down the difference of entropy, ΔS, between a sum of each two kinds of gas and the mixture.

Q4 Explain the process of the mixture is irreversible based on the ΔS. Write down ΔS in the case of $V_1=V_2=V/2$ and $N_1=N_2=N/2$.

Q5 Show the no difference of the entropy by the mixture of two identical gases. You can use the following Stirling's formula without proof: $\log N! = N \log N - N$.

Q6 Consider calculation of the difference of entropy, ΔS, for the present mixture by classical thermodynamics. To find the entropy difference between any two states of a system, the process must be replaced for a reversible path between the initial and final states. Write down the replaced reversible path. Write down ΔS by classical thermodynamics using ideal gas constant, R, and Avogadro number, N_{A}.