

**令和5年度**  
**筑波大学大学院 入学試験**  
**理工情報生命学術院 数理物質科学研究群**  
**物理学学位プログラム 試験問題**

**専門科目**

注意事項（選択、解答についての必要な指示）

1. 5つの問題（I~V）がある。問題 I では最初の説明文を良く読んでから解答せよ。問題 II~V では、基礎問題と応用問題（[A], [B]）があり、全ての問題に解答せよ。問題文は、最初に日本語で、次に英語で書かれている。問題の内容は同じものである。

There are five problems (I~V). For the problem I, read carefully the explanation in the first page. Each of problems II~V consists of basic and advanced problems ([A], [B]). Answer both of them. All the problems are given first in Japanese, and then in English. The contents of the problems are the same.

2. それぞれの問題につき一枚の解答用紙を用いよ。また、問題番号を明記せよ。

Use one sheet of answer paper separately for each problem. Write the problem number at the top of the sheets.

3. 下書き用紙は採点の対象としない。

Draft sheets will not be marked.

# I

以下の 10 問のうち 5 問を選択し、問題番号を明記の上、解答せよ。但し、[A]、[B] の 2 つの問題群の中から、それぞれ最低 2 問を選択すること。 $i$  は虚数単位を表すものとする。

## [A]

問 1. 次の行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

問 2. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。 $a, b$  は実数とする。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

問 3. 複素数  $\sqrt{i-1}$  を実数  $a, b$  を用いて  $\sqrt{i-1} = a+bi$  と書くとき、 $a$  と  $b$  を求めよ。

問 4.  $w = \frac{z-i}{z+i}$  により、 $z$  の複素平面の上半面  $\text{Im}z > 0$  は  $w$  の複素平面のどのような領域に写像されるか。

問 5. 複素平面上で  $|z| = 1$  の円周上を反時計回りに 1 周する経路を  $C$  とするとき、次の複素積分

$$\oint_C \frac{\cos z}{z} dz$$

を計算せよ。

## [B]

問 6. 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 8x$$

(次頁につづく)

問 7.  $\vec{r} = (x, y, z)$  を 3 次元空間の位置ベクトルとし、 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  を定点の位置ベクトルとする。次の関係が、 $\vec{r} \neq \vec{a}$  となる全ての点  $\vec{r}$  において成り立つことを示せ。

$$\vec{\nabla}^2 \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} \right) = 0$$

$\vec{\nabla}$  は次のように定義される。

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

問 8.  $\vec{A}(r)$  を、位置ベクトル  $\vec{r}$  の大きさ  $r = |\vec{r}|$  だけに依存する 3 次元空間のベクトル場とする。このとき、次の関係を示せ。

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{A}(r) \times \vec{r}] = 0$$

問 9. 2 つの実関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の区間  $[a, b]$  の積分について、次のシュワルツの不等式

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x)dx \right\}^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx$$

が成り立つことを示し、等号が成り立つ条件を述べよ。

問 10. 3 次元空間のベクトル  $\vec{r} = (x, y, z)$  の関数  $f(\vec{r})$  に対するフーリエ変換  $F(\vec{k})$  を、

$$F(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \ e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r})$$

により定義する。関数  $f(\vec{r})$  が  $\vec{r}$  の大きさ  $r = |\vec{r}|$  だけに依存する関数であるとき、 $F(\vec{k})$  は  $\vec{k}$  の大きさ  $k = |\vec{k}|$  だけに依存する関数となることを示せ。

I

Answer five out of the following ten questions choosing at least two questions in each of the groups [A] and [B]. Write the question number clearly on the answer sheet. The imaginary unit is represented by  $i$ .

[A]

Q1. Calculate the determinant of the following matrix.

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

Q2. Find all the eigenvalues and the eigenvectors of the following matrix where  $a$  and  $b$  are real numbers.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Q3. The complex number  $\sqrt{i-1}$  is expressed as  $\sqrt{i-1} = a+bi$  using real numbers  $a$  and  $b$ . Find the values of  $a$  and  $b$ .

Q4. Consider the upper-half of the complex plane for complex variable  $z$ ,  $\text{Im}z > 0$ . Describe the region in the complex plane occupied by the complex variable  $w$ , given the mapping  $w = \frac{z-i}{z+i}$ .

Q5. Evaluate the integral

$$\oint_C \frac{\cos z}{z} dz,$$

where  $C$  is a contour counter-clockwise along the circle  $|z| = 1$ .

[B]

Q6. Find the general solution for the following differential equation.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 8x$$

(Continued on the next page)

- Q7. Let  $\vec{r} = (x, y, z)$  be a position vector in three-dimensional space and  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  be the position vector of a fixed point. Show that the following relation holds at every point  $\vec{r}$  except at  $\vec{r} = \vec{a}$ .

$$\vec{\nabla}^2 \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} \right) = 0$$

$\vec{\nabla}$  is defined by

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

- Q8. Let  $\vec{A}(r)$  be a vector field that depends on  $r$ , the magnitude of the position vector  $\vec{r}$  in three-dimensional space. Show that the following relation is true.

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{A}(r) \times \vec{r}] = 0$$

- Q9. Show that the following Schwarz inequality holds,

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x)dx \right\}^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx,$$

for the integrals involving two real-valued functions of  $f(x)$  and  $g(x)$  over the interval  $[a, b]$ . Find the condition for equality.

- Q10. Define the Fourier transform  $F(\vec{k})$  of a function  $f(\vec{r})$  that depends on the vector  $\vec{r} = (x, y, z)$  in three-dimensional space through

$$F(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r}).$$

Show that  $F(\vec{k})$  depends only on  $k = |\vec{k}|$ , the magnitude of the vector  $\vec{k}$ , if the function  $f(\vec{r})$  depends only on  $r = |\vec{r}|$ , the magnitude of the vector  $\vec{r}$ .

## II

### [A]

問 1. 位置  $\vec{r} = (x, y, z)$  にある質量  $m$  の粒子に及ぼす万有引力は、

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \int d^3q \frac{Gm\rho(\vec{q})}{|\vec{r} - \vec{q}|^2} \frac{\vec{r} - \vec{q}}{|\vec{r} - \vec{q}|}$$

で与えられる。但し、 $\rho(\vec{r})$  はそのまわりの密度分布であり、 $G$  は万有引力定数である。 $\vec{q}$  は位置を表す積分変数である。これと等価な、万有引力の法則の微分形 ( $\vec{F}$  と  $\rho$  の微分方程式) をナブラ演算子

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

を用いて書け。

問 2. 密度分布が  $\rho(\vec{r})$  の物体が質量  $m$  の粒子に及ぼす万有引力を  $\vec{F}$  とする。空間内に、ある領域  $V$  を考える。その境界の閉曲面を  $S$  と書く。領域  $V$  の内部にある全質量と、 $S$  上の力の関係式 (万有引力の法則の積分形) を書け。

問 3. 万有引力では真空中 (物質が存在しない領域) に安定な釣り合いの位置は実現できない。この事を、万有引力の法則に基づいて説明せよ。万有引力の『釣り合いの位置』とは、物質からの万有引力の合力がゼロで、その位置から少し離れた位置では釣り合いの位置の方向に復元力が働く時、その釣り合いの位置は『安定』であると言う。

(次頁につづく)

[B]

半径  $R$ 、密度  $\rho$  の一様な球体の内部に十分細いトンネル（これにより球体から排除される領域が無視できる）があり、質量  $m$  の質点がトンネル内を運動する (図 1)。トンネルの経路は、球面上の 2 点を結ぶなめらかな線である。質点に働く力は、球体の各部からの万有引力と、運動をトンネル内に留める拘束力のみであり、トンネルとの摩擦は無いものとする。球体の質量は質点の質量に比べて圧倒的に大きく、球体は静止しているとみなしてよい。万有引力定数を  $G$  として、以下の問に答えよ。

- 問 1. 質点に働く球体からの万有引力を、球体の中心を原点とする質点の位置ベクトル  $\vec{r}$  を用いて表せ。
- 問 2. トンネル内の質点の運動を理解する為、まず、問 1 の力のみを受けて運動する質点を考える (図 2)。質点は原点を中心とする半径  $R$  の球の内側領域を自由に運動でき、その領域の外に飛び出すことはないものとする。
- (a) この質点の運動では力学的エネルギーと原点のまわりの角運動量が保存する。各々の表式を書け。
- (b) 質点の運動はある平面内に留まることを示せ。
- (c) 質点の球体内の軌道で、球面上の一点  $\vec{r} = (x, y, z) = (R, 0, 0)$  を通り、 $x - y$  平面内にあるものを求めよ。 $x, y, z$  は球の中心を原点とする直交座標である。必要であれば、原点と質点の最小距離  $A$  を用いて答えよ。
- 問 3. 次に、トンネル内の質点の運動を考える。トンネルの一端に質点を静かに (初速ゼロで) 置いたところ、質点はトンネル内を運動し、トンネルの他端に達した。その時の質点の速さはトンネルの経路によらず一定である。この事を、トンネル内の運動で成り立つ保存則を用いて説明し、他端での質点の速さを求めよ。保存量の表式を書き、それが保存する理由を簡潔に述べること。
- 問 4. トンネルは、球面上の両端を結ぶ直線 (の球体内の部分) とする (図 3)。一端から初速ゼロでトンネルに入った質点が他端に達するまでの時間を求めよ。球体の中心とトンネルとの距離を  $y_0$  とする。

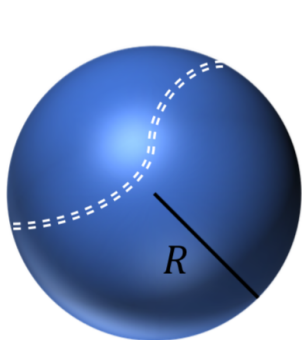


図 1

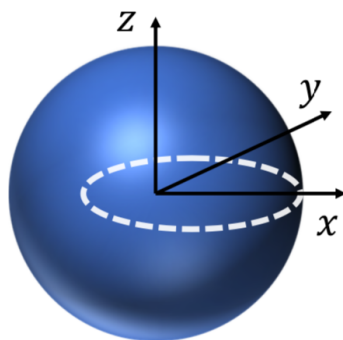


図 2

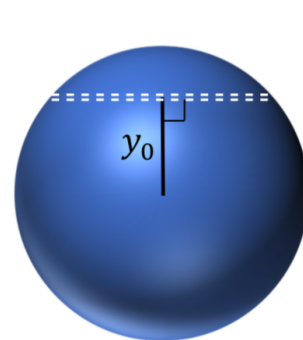


図 3

## II

[A]

- Q1. The gravitational force on a point mass particle with mass  $m$  at position  $\vec{r} = (x, y, z)$  is given by the following integral equation :

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \int d^3q \frac{Gm\rho(\vec{q})}{|\vec{r} - \vec{q}|^2} \frac{\vec{r} - \vec{q}}{|\vec{r} - \vec{q}|},$$

where  $\rho(\vec{r})$  is the density distribution of the ambient material and  $G$  is the gravitational constant and  $\vec{q}$  is position for the integral. Write down the equivalent differential form of the Newton's law of gravitation (differential equation with  $\vec{F}$  and  $\rho$ ) using the following differential operator, nabla :

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

- Q2. The density distribution  $\rho(\vec{r})$  results in a gravitational force  $\vec{F}$  on a point mass particle with mass  $m$ . Consider a volume  $V$  in 3D-space, bounded by surface  $S$ . Write down the relation (integral formula of Newton's law of gravitation) between the total mass within the volume  $V$  and the force on the closed surface  $S$ .
- Q3. Within a vacuum, a region devoid of matter, there exist no points of stable equilibrium in the presence of Newton's gravitational forces. Explain this fact based on Newton's gravitational law. Note that any "stable equilibrium position" in the presence of Newton's gravitational force, the total force from the surrounding material must be zero. At a slightly displaced position from the "stable equilibrium position", a restoring force must act in the direction of the "stable equilibrium position".

(Continued on the next page)



[B]

Inside a sphere with radius  $R$  and uniform density  $\rho$ , a point mass of mass  $m$  can go through a small tunnel-like hole as shown in Fig.1. The tunnel is defined by smoothly connecting any two different points on the surface of the sphere. The force acting on the point mass is only the gravitational force from the sphere and the motion of the point mass is restricted to the path of the tunnel. Any friction between the point mass and the tunnel can be ignored. We may also ignore the change in the gravity and mass of the sphere caused by the hole. The mass of the sphere is large enough compared to the point mass, so that we can assume the sphere does not move. Answer the following questions using the gravitational constant  $G$ .

- Q1. Write down the gravitational force on the point mass from the sphere using the position  $\vec{r}$  of the point mass, where the origin is the center of the sphere.
- Q2. In order to understand the motion of the point mass within the tunnel, we first consider the motion of the point mass just by the force in Q1. without considering the path of the tunnel as shown in Fig.2. Assume that the point mass can move freely within the sphere of radius  $R$  and that it does not leave the sphere.
- (a) As the point mass moves, its kinetic energy and its angular momentum around the origin are conserved. Write down the conservation equation for each quantity.
  - (b) Show that the motion of the point mass is restricted to a plane.
  - (c) Find a trajectory of the point mass within the sphere that goes through a point on the surface of the sphere at  $\vec{r} = (x, y, z) = (R, 0, 0)$  and stays on the  $x - y$  plane.  $x, y$  and  $z$  are Cartesian coordinates with the origin at the center of the sphere. Express the trajectory in terms of the minimum distance  $A$  between the origin and the trajectory.
- Q3. Let us now turn to the motion of the point mass through the tunnel. The point mass is placed at rest on one end of the tunnel (with zero initial velocity). The point mass has gone through the tunnel and reached the other end of the tunnel. In this process, the velocity at the other end is a constant and does not depend on the path of the tunnel. Explain this fact with a conservation law that applies to the motion of the point mass within the tunnel and find the velocity of the point mass at the other end of the tunnel. Write down the conservation equation for the relevant conserved quantity and explain the reason why the quantity is conserved briefly.
- Q4. Consider the case in which the tunnel is a straight line between two points on the surface of the sphere as shown in Fig.3. After entering one end of the tunnel with zero initial velocity, find the time needed for the point mass to reach the other end

(Continued on the next page)

of the tunnel, where the minimum distance between the center of the sphere and the tunnel is  $y_0$ .

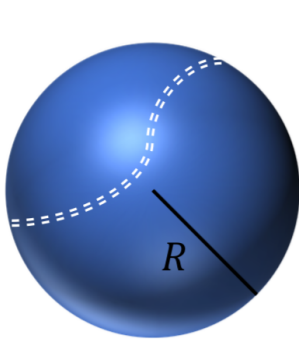


Fig.1

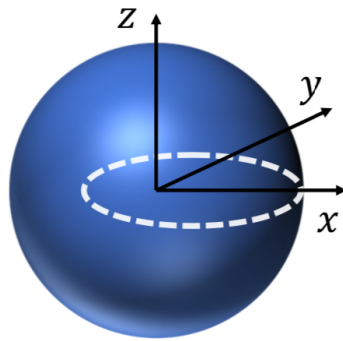


Fig.2

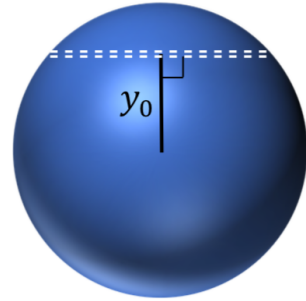


Fig.3

### III

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$  ( $h$  はプランク定数) として、以下の問 [A], [B] に答えよ。

#### [A]

2つの  $\frac{1}{2}$  スピン粒子のスピン演算子を  $\hat{s}_1 = (\hat{s}_1^x, \hat{s}_1^y, \hat{s}_1^z)$ ,  $\hat{s}_2 = (\hat{s}_2^x, \hat{s}_2^y, \hat{s}_2^z)$  とする。以下の問に答えよ。

- 問 1. 演算子  $\hat{s}_1^z \hat{s}_2^z / \hbar^2$  の最大固有値とそれを実現する状態の縮退度を答えよ。  
問 2. 演算子  $(\hat{s}_1 + \hat{s}_2)^2 / \hbar^2$  の最大固有値とそれを実現する状態の縮退度を答えよ。  
問 3. 演算子  $\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2 / \hbar^2 + (\hat{s}_1^z + \hat{s}_2^z) / \hbar$  の最大固有値とそれを実現する状態の縮退度を答えよ。

#### [B]

質量  $m$  と周波数  $\omega$  を持つ調和振動子のハミルトニアンを  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$  とする ( $\hat{x}$  は座標演算子、 $\hat{p}$  は運動量演算子)。生成・消滅演算子  $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$  を

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{m\omega}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\omega}} \right); \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{m\omega}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\omega}} \right)$$

とし、数演算子を  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  とする。以下の問に答えよ。

- 問 1. ハミルトニアン  $\hat{H}$  が  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2)$  となることを示せ。  
問 2. 真空状態  $|\phi_0\rangle$  を  $\hat{a}|\phi_0\rangle = 0$  により定義する。真空状態の波動関数  $\phi_0(x) = \langle x|\phi_0\rangle$  を求めよ。規格化はしなくて良い。  
問 3. 数演算子  $\hat{n}$  の関数  $f(\hat{n})$  に対し、 $f(\hat{n})\hat{a} = \hat{a}f(\hat{n} - 1)$  及び  $f(\hat{n})\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger f(\hat{n} + 1)$  が成り立つ。その理由を簡潔に説明し、この関係式を利用して、 $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{a}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$  および  $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{a}^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$  を  $c_1\hat{a} + c_2\hat{a}^\dagger$  の形で表わせ。ただし  $c_1, c_2$  は演算子を含まない複素数とする。

(次頁につづく)

以下では、状態  $|\psi\rangle$  は  $(\hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger \sinh r)|\psi\rangle = 0$  ( $r$  は実数) を満たす状態とし、状態  $|\psi(t)\rangle$  は、 $t = 0$  における初期状態  $|\psi(0)\rangle = |\psi\rangle$  からシュレーディンガー方程式  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$  に従い時間発展をおこなった状態とする。

問 4. 状態  $|\psi\rangle$  に対する波動関数  $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$  を求めよ。規格化はしなくて良い。

問 5. 状態  $|\psi(t)\rangle$  に対し、 $\hat{A}(t)|\psi(t)\rangle = 0$  を満たす演算子  $\hat{A}(t)$  を見つけたい。 $\hat{A}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} (\hat{a} \cosh r + \hat{a}^\dagger \sinh r) e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$  と選べることを示し、 $\hat{A}(t)$  を  $c_1 \hat{a} + c_2 \hat{a}^\dagger$  の形で表わせ。ただし  $c_1, c_2$  は演算子を含まない複素数とする。

問 6. 時刻  $t = \frac{\pi}{2\omega}$  における波動関数  $\psi(x, t = \frac{\pi}{2\omega}) = \langle x|\psi(t = \frac{\pi}{2\omega})\rangle$  を求めよ。規格化はしなくて良い。

### III

Answer the following questions [A] and [B]. We set  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  with the Planck constant  $h$ .

#### [A]

Consider two spin-1/2 particles whose spin operators are  $\hat{\vec{s}}_1 = (\hat{s}_1^x, \hat{s}_1^y, \hat{s}_1^z)$  and  $\hat{\vec{s}}_2 = (\hat{s}_2^x, \hat{s}_2^y, \hat{s}_2^z)$ . Answer the following questions.

- Q1. Answer the maximal eigenvalue of the operator  $\hat{s}_1^z \hat{s}_2^z / \hbar^2$  and the degeneracy of the state(s) realizing it.
- Q2. Answer the maximal eigenvalue of the operator  $(\hat{\vec{s}}_1 + \hat{\vec{s}}_2)^2 / \hbar^2$  and the degeneracy of the state(s) realizing it.
- Q3. Answer the maximal eigenvalue of the operator  $\hat{\vec{s}}_1 \cdot \hat{\vec{s}}_2 / \hbar^2 + (\hat{s}_1^z + \hat{s}_2^z) / \hbar$  and the degeneracy of the state(s) realizing it.

#### [B]

Consider the harmonic oscillator with mass  $m$  and frequency  $\omega$ , whose Hamiltonian is given by  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$  (with the coordinate operator  $\hat{x}$  and the momentum operator  $\hat{p}$ ). We introduce the creation and annihilation operators  $\hat{a}^\dagger$  and  $\hat{a}$  by

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{m\omega}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\omega}} \right); \quad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left( \sqrt{m\omega}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{m\omega}} \right),$$

as well as the number operator  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ . Answer the following questions.

- Q1. Show the Hamiltonian  $\hat{H}$  is equal to  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{n} + 1/2)$ .
- Q2. Let us define the vacuum state  $|\phi_0\rangle$  by  $\hat{a}|\phi_0\rangle = 0$ . Answer the wavefunction of the vacuum state  $\phi_0(x) = \langle x|\phi_0\rangle$ . The normalization of the wavefunction is not necessary.

(Continued on the next page)

- Q3. For an operator function  $f(\hat{n})$  of the number operator  $\hat{n}$ ,  $f(\hat{n})\hat{a} = \hat{a}f(\hat{n}-1)$  and  $f(\hat{n})\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger f(\hat{n}+1)$  are hold. Explain succinctly why these relations are hold. And using the relations, express  $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{a}e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$  and  $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{a}^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$  in a form of  $c_1\hat{a} + c_2\hat{a}^\dagger$ , where  $c_1, c_2$  are complex numbers without operators.

In the following, let the state  $|\psi\rangle$  satisfy  $(\hat{a}\cosh r + \hat{a}^\dagger\sinh r)|\psi\rangle = 0$ , with a real number  $r$ . We consider the state  $|\psi(t)\rangle$  that satisfies the Schrödinger equation  $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$  with the initial state  $|\psi(0)\rangle = |\psi\rangle$  at  $t = 0$ .

- Q4. Answer the wavefunction of the state  $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ . The normalization of the wavefunction is not necessary.
- Q5. We like find an operator  $\hat{A}(t)$  characterized by  $\hat{A}(t)|\psi(t)\rangle = 0$ . Show that you can choose  $\hat{A}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}(\hat{a}\cosh r + \hat{a}^\dagger\sinh r)e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ , and express  $\hat{A}(t)$  in a form of  $c_1\hat{a} + c_2\hat{a}^\dagger$  where  $c_1, c_2$  are complex numbers without operators.
- Q6. Answer the wavefunction  $\psi(x, t = \frac{\pi}{2\omega}) = \langle x|\psi(t = \frac{\pi}{2\omega})\rangle$  at  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ . The normalization of the wavefunction is no necessary.

## IV.

[A]

問 1. 質量  $m$ 、電荷  $q$  の荷電粒子が、一様な静磁場中を速さ  $v$ 、半径  $r$  の円運動をしている。

(a) 磁束密度の大きさ  $B$  を求めよ。

(b) 磁束密度ベクトル  $\vec{B}$  の向きに  $x$  軸にとる。 $x$  軸の正の向きに一様な静電場  $\vec{E}$  を印加したとき、荷電粒子の  $x$  方向の変位が  $X$  となるまでに要する時間  $t$  を求めよ。

問 2. 静電容量  $C$  のコンデンサに、電圧  $V = V_0 \sin \omega t$  を印加した ( $\omega$  は角振動数、 $t$  は時刻を表す)。このときの容量性リアクタンス  $X_C$  を求めよ。

問 3. 真空中に電荷  $q$  の点電荷を 1 個だけ置く。このとき、点電荷から距離  $r$  だけ離れた位置での電場をガウスの法則を用いて求めよ。なお、真空の誘電率を  $\epsilon_0$  とする。

(次頁につづく)

[B]

図1のように、半径  $R$  の導体球の中心を原点  $O$  とし、電荷  $+Q$  を点  $A(x, y, z) = (\ell, 0, 0)$  に置いた。導体球の外側における電場を鏡像法により求める。ここで、 $\ell > R$  であり、真空中であるとして、その誘電率を  $\varepsilon_0$  とする。 $Q$ 、 $R$ 、 $\ell$  及び  $\varepsilon_0$  を用いて、以下の問に答えよ。

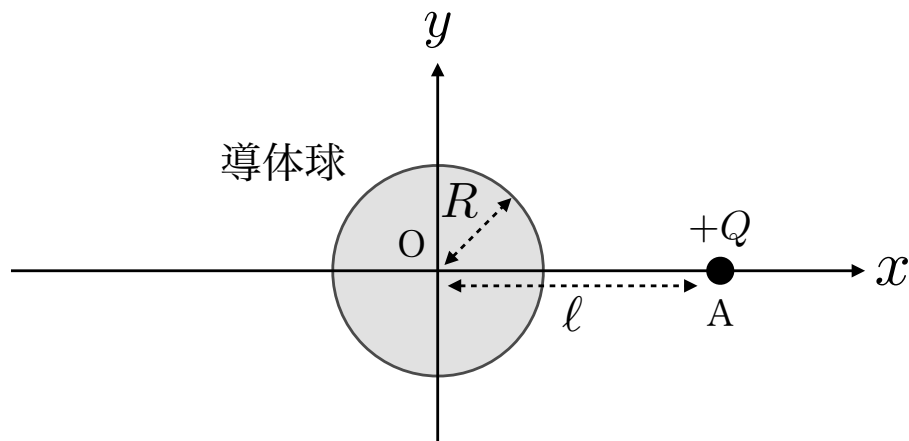


図 1

問1. 導体球を接地した場合を考える。導体表面の電位は一定となる。この際、導体球の代わりに、点電荷  $Q_B$  の仮定の電荷を点  $B(\ell_B, 0, 0)$  に置くことで、導体球の外側の任意の点において、導体球がある場合と同じ電位を与えることができる。 $Q_B$  と  $\ell_B$  を求めよ。

問2. 導体球が接地されておらず、電荷を持たない場合を考える。問1の点電荷  $Q_B$  に加え、点電荷  $Q_C$  を点  $C(\ell_C, 0, 0)$  に置くことで、導体外部の電位を与えることができる。 $Q_C$  と  $\ell_C$  を求めよ。また、点電荷  $+Q$  を点  $A$  から  $x$  軸正方向の無限遠へと運ぶのに要する仕事を求めよ。

(次頁につづく)



次に、図2のように点Aに置かれた点電荷 $+Q$ と、点D $(-\ell, 0, 0)$ に置かれた点電荷 $-Q$ について考える。原点Oから $r$ の距離に点Pがあり、線分OPと $x$ 軸がなす角を $\theta$ とする。

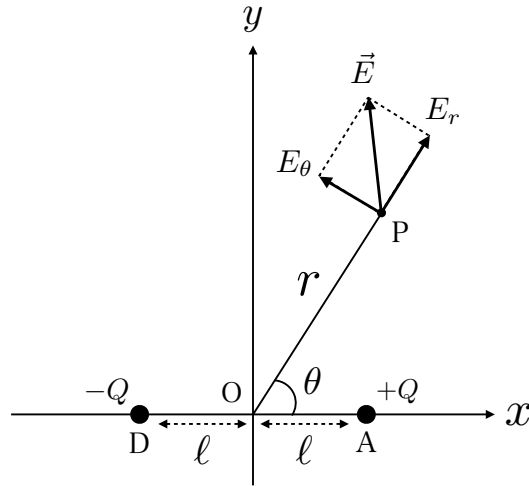


図 2

問3. 点Pにおける電場 $\vec{E}$ の極座標成分 $E_r$ と $E_\theta$ を求めよ。ただし、距離 $r$ は $\ell$ より十分大きいとして、 $(\ell/r)$ の2次以上の項は無視できるとする。この場合には、APの距離 $r_{AP}$ とDPの距離 $r_{DP}$ は以下のように近似することができることを用いて良い。

$$r_{AP} \simeq r - \ell \cos \theta, \quad r_{DP} \simeq r + \ell \cos \theta$$

問4. 次に、 $Q/\ell^2$ を一定に保ちながら、点AとDに置かれた点電荷 $+Q$ と点電荷 $-Q$ を無限遠に置く極限( $\ell \rightarrow \infty, Q \rightarrow \infty$ )を考える。点電荷 $+Q$ と点電荷 $-Q$ が原点付近に作る電場の $x$ 軸方向成分 $E_0$ を求めよ。

問5. 問4の条件に加えて、図1と同様に、接地された半径 $R$ の導体球も中心を原点Oに一致させて置いた。このとき、中心Oから $r$ の距離にある導体球外部の点Pにおける電場 $\vec{E}$ の極座標成分 $E_r$ と $E_\theta$ を求めよ。

## IV.

[A]

- Q1. There is a charged particle with a mass  $m$  and a charge  $q$ , which moves in a circular motion with a velocity  $v$  in a uniform magnetic field.
- (a) Find the magnitude of the magnetic flux density  $B$ .
  - (b) Let us define the  $x$ -axis along a magnetic flux density vector  $\vec{B}$ , and apply a uniform static electric field  $\vec{E}$ . Find the time  $t$  until the displacement of the charged particle along the  $x$ -axis reaches  $X$ .
- Q2. A voltage  $V = V_0 \sin \omega t$  is applied to a capacitor  $C$ , where  $\omega$  and  $t$  denote the angular frequency and the time, respectively. Find the capacitive reactance  $X_C$ .
- Q3. Consider a point charge  $q$  in vacuum. Using the Gauss's law, derive the electric field at the distance  $r$  from the point charge. Here, a permittivity of vacuum is denoted by  $\varepsilon_0$ .

(Continued on the next page)

[B]

A spherical conductor of radius  $R$  is placed and its center is the origin  $O$  as shown in Figure 1. The electric field outside the conductor is calculated with the method of the image charges. A point charge  $+Q$  is placed at point  $A$   $(x, y, z) = (\ell, 0, 0)$ , where  $\ell > R$ . The charge is placed in a vacuum, and the dielectric constant of the vacuum is  $\epsilon_0$ . Answer the following questions with  $Q$ ,  $R$ ,  $\ell$ , and  $\epsilon_0$ .

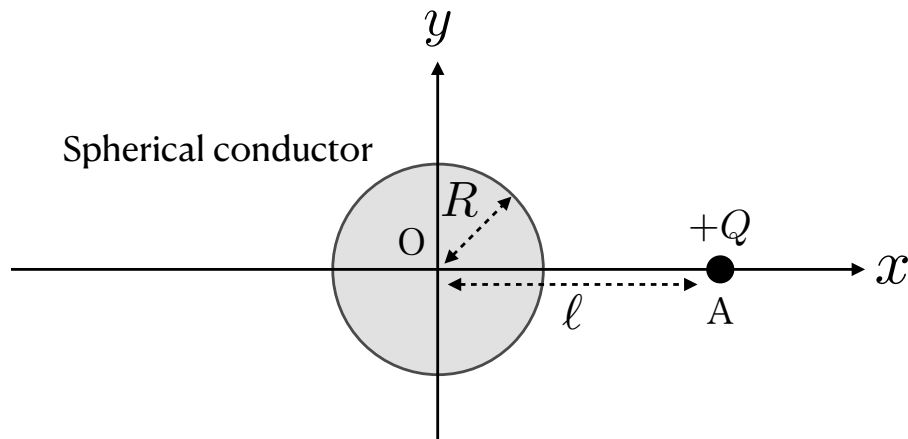


Figure 1

- Q1. Suppose that the spherical conductor is grounded. The potential at the conductor surface is constant. In this case, a virtual charge  $Q_B$  can be placed at the point  $B$   $(\ell_B, 0, 0)$  to give the same potential outside the conductor, instead of placing the conductor. Find  $Q_B$  and  $\ell_B$ .
- Q2. Next, the spherical conductor is not grounded and has no charge. In addition to the point charge  $Q_B$  obtained in Q1, a point charge  $Q_C$  can be placed at the point  $C$   $(\ell_C, 0, 0)$  to give the same potential outside the conductor, instead of placing the conductor. Find  $Q_C$  and  $\ell_C$ . Also, find the work required to carry the point charge  $+Q$  from point  $A$  to infinity on the  $x$ -axis positive direction.

(Continued on the next page)

Now, suppose that a point charge  $-Q$  is placed at the point D  $(-\ell, 0, 0)$  in addition to the point charge  $+Q$  at the point A as shown in Figure 2. The point P is at a distance  $r$  from the origin O. The angle between the line OP and the  $x$ -axis is  $\theta$ .

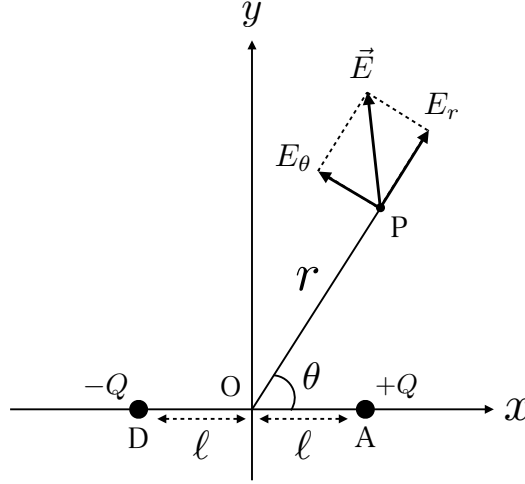


Figure 2

- Q3. Find the  $r$ -component  $E_r$  and the  $\theta$ -component  $E_\theta$  of the electric field  $\vec{E}$  at the point P. Suppose that the distance  $r$  is sufficiently larger than  $\ell$ , and the second order and higher-order terms of  $(\ell/r)$  can be neglected. In this case, distance  $r_{AP}$  between AP and  $r_{DP}$  between DP can be approximated as follows:

$$r_{AP} \simeq r - \ell \cos \theta, \quad r_{DP} \simeq r + \ell \cos \theta$$

- Q4. Suppose that the charges  $+Q$  and  $-Q$  at the points A and D are placed at infinity while keeping  $Q/\ell^2$  constant ( $\ell \rightarrow \infty$ ,  $Q \rightarrow \infty$ ). Find the  $x$ -axis component  $E_0$  of the electric field around the origin O due to the charges  $+Q$  and  $-Q$ .
- Q5. Same as Q1, suppose that a grounded spherical conductor of radius  $R$  is also placed at the origin O in Q4. Find the  $r$ -component  $E_r$  and the  $\theta$ -component  $E_\theta$  of the electric field  $\vec{E}$  at the point P outside the conductor at a distance  $r$  from the origin O.

## V

### [A]

以下の問いにそれぞれ答えよ。ボルツマン定数を  $k$  とする。

問1. カノニカル集合において平衡状態を指定する熱力学的状態量を以下からすべて選べ。

選択肢： 粒子数、体積、内部エネルギー、温度、化学ポテンシャル、エントロピー

問2. 温度  $T$  におけるカノニカル集合において、各微視的状态  $r$  のエネルギーが  $E_r$  で、分配関数（状態和） $Z$  である系を考えたとき、微視的状态  $r$  の出現確率  $p_r$  を示せ。

問3. 温度  $T$  におけるカノニカル集合において、ヘルムホルツ自由エネルギー  $F$  と分配関数（状態和） $Z$  との関係を記せ。

問4. 以下の状態量から示強性状態量をすべて選べ。

選択肢： 粒子数、体積、内部エネルギー、温度、化学ポテンシャル、エントロピー

(次頁につづく)

## [B]

温度  $T$ 、体積  $V$  の三次元の箱の中に質量  $m$  の気体分子が入っている状態を考える。気体分子は理想気体であるとき、以下の問いに答えよ。ただし、 $\beta = 1/(kT)$  ( $k$  がボルツマン定数) を逆数温度、 $\hbar$  をプランク定数 ( $\hbar = h/(2\pi)$ ) とする。

問1. 気体分子が  $N$  個の時、分配関数  $Z$  が、

$$Z = \frac{V^N}{N!} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{3N/2}$$

となることを示せ。ただし、以下の積分公式を使ってもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$$

問2. 別の系との間で気体分子のやり取りがあるとすると、化学ポテンシャル  $\mu$  を用いて、大分配関数  $\Xi$  と分配関数  $Z$  の関係を示しなさい。

問3. 圧力  $P$  は大分配関数  $\Xi$  と体積  $V$  を用いて、

$$P = \frac{\log \Xi}{\beta V}$$

と表すことができる。この時、問1の分配関数  $Z$  と問2の関係を用いることより、 $\mu, m, \beta, \hbar$  を使って理想気体の圧力  $P$  を求めよ。

次に、上述の分子の表面への吸着（吸着サイト系）について考える。表面には  $N_s$  個の分子が吸着できる吸着サイトがあり、各々の吸着サイトには、気体分子が一つだけくっつくか、何もついていないかのいずれかだとする。分子一つあたりのそれぞれ、化学ポテンシャルを  $\mu$ 、吸着エネルギーを  $-v < 0$  とする。また、吸着分子間の相互作用は無視できるものとする。この時、以下の問いについてそれぞれ答えよ。

問4. 吸着サイト系の大分配関数  $\Xi$  が、

$$\Xi = (1 + e^{\beta(v+\mu)})^{N_s}$$

であることを示せ。

(次頁につづく)

問5. 表面に吸着している分子の総数  $\langle N \rangle$  が

$$\langle N \rangle = \frac{N_s e^{\beta(v+\mu)}}{1 + e^{\beta(v+\mu)}}$$

であることを示せ。

問6. 吸着サイトのどの程度が分子でふさがっているかという被覆率を  $\Theta \equiv \langle N \rangle / N_s$  と定義すると、問3で求めた圧力  $P$  と問5で求めた  $\langle N \rangle$  を用いて、

$$\Theta = \frac{P}{P + P_0(\beta)}$$

となることを示せ。ここで、

$$P_0(\beta) = \frac{e^{-\beta v}}{\beta} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{3/2}$$

である。

V

[A]

Answer the following questions. Let  $k$  be the Boltzmann constant.

- Q1. Choose all thermodynamic properties that specify equilibrium in a canonical ensemble from the following:  
“particle number, volume, internal energy, temperature, chemical potential, entropy”
- Q2. Write down the probability  $p_r$  of a state  $r$  with energy  $E_r$  in the canonical ensemble with temperature  $T$  and partition function (sum over states)  $Z$ .
- Q3. Write down the relation between the partition function (sum over states)  $Z$  and the Helmholtz free energy  $F$  in the canonical ensemble with temperature  $T$ .
- Q4. Choose all intensive properties from the following:  
“particle number, volume, internal energy, temperature, chemical potential, entropy”

(Continued on the next page)



[B]

Consider an ideal gas consisting of independent molecules each with mass  $m$  in a box of volume  $V$  at temperature  $T$ . Let  $\beta = 1/(kT)$  ( $k$  is the Boltzmann constant) be the thermodynamic beta and  $h$  be the Planck constant ( $\hbar = h/(2\pi)$ ). Answer the following questions.

Q1. For  $N$  molecules, show that the partition function  $Z$  is given by

$$Z = \frac{V^N}{N!} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{3N/2}.$$

You can use the following integral formula without proof:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0).$$

Q2. Write down the relation between the grand partition function  $\Xi$  and partition function  $Z$  by using the chemical potential  $\mu$ .

Q3. The pressure  $P$  can be expressed using the grand partition function  $\Xi$  and volume  $V$  as

$$P = \frac{\log \Xi}{\beta V}.$$

Find the pressure  $P$  of an ideal gas in terms of  $\mu, m, \beta, \hbar$  by using the results from Q1 and Q2.

Next, consider the adsorption of the above-mentioned molecules on a surface. Let us assume that the surface has adsorption sites that can adsorb  $N_s$  molecules, in which each adsorption site has either one molecule attached to it or none. Let the chemical potential and adsorption energy of each molecule be  $\mu$  and  $-v < 0$ , respectively. Let us assume that the intermolecular interactions of the adsorbed molecules are negligible. Answer the following questions.

Q4. Show that the grand partition function  $\Xi$  in the adsorption system can be expressed as

$$\Xi = (1 + e^{\beta(v+\mu)})^{N_s}.$$

(Continued on the next page)

Q5. Show that the total number of molecules  $\langle N \rangle$  adsorbed on the surface is

$$\langle N \rangle = \frac{N_s e^{\beta(v+\mu)}}{1 + e^{\beta(v+\mu)}}.$$

Q6. Let us define the coverage as the fraction of adsorption sites blocked by molecules, that is  $\Theta \equiv \langle N \rangle / N_s$ . Show that the coverage can be expressed using the results of Q3 and Q5 as

$$\Theta = \frac{P}{P + P_0(\beta)},$$

where

$$P_0(\beta) = \frac{e^{-\beta v}}{\beta} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{3/2}.$$