令和4年度

筑波大学大学院　入学試験

理工情報生命学術院　数理物質科学研究群

物理学学位プログラム　試験問題

専門科目

注意事項（選択、解答についての必要な指示）

1．　５つの問題（I～V）がある。問題 I では最初の説明文を良く読んでから解答せよ。問題 II～V では、基礎問題と応用問題（[A], [B]）があり、全ての問題に解答せよ。解答は選択肢から適当なものを選ぶか指示に従って記入せよ。問題文は、最初に日本語で、次に英語で書かれている。問題の内容は同じものである。

There are five problems (I～V). For the problem I, read carefully the explanation in the first page. Each of problems II～V consists of basic and advanced problems ([A], [B]) and answer all of them by selecting the correct answer(s) from the list of choices or by writing the answer. All the problems are given first in Japanese, and then in English. The contents of the problems are the same.

2．　それぞれの問題につき一枚の解答用紙を用いよ。また、問題番号を明記せよ。

Use one sheet of answer paper separately for each problem. Write the problem number at the top of the sheets.

3　下書き用紙は採点の対象としない。

Draft sheets will not be marked.

I

以下の 10 問のうち 5 問を選択し、問題番号を明記の上、解答せよ。ただし、[A]、[B]、[C] の各問題群の中から最低 1 問以上選択すること。答えは (1)〜(6) から選べ。

[A]

問 1. 次の行列式の値として正しいものを選べ。

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

(1) 8　(2) 12　(3) 16　(4) -8　(5) -12　(6) -16

問 2. 次の行列の逆行列を求め、そのすべての要素の和の値として正しいものを選べ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) $\frac{3}{13}$　(2) $\frac{5}{13}$　(3) $\frac{7}{13}$　(4) $\frac{9}{13}$　(5) $\frac{11}{13}$　(6) 1

問 3. 点 X(-2,0,z) が 3 点 A(1,1,3)、B(0,-2,2)、C(3,-1,0) を通る平面上にある。この時、z の値として正しいものを選べ。

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 5　(6) 6

(次頁に続く)

問 4. 三次元空間における位置ベクトル $\vec{r} = (x, y, z)$ と定ベクトル $\vec{a}$ に対して、

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{a} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

の値として正しいものを選べ。ただし $r = |\vec{r}|$ とする。

(1) $\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$　　(2) $-\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$　　(3) $\frac{3\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^5}$

(4) $-\frac{3\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^5}$　　(5) $\vec{a} \cdot (\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{3\vec{r}}{r^5})$　　(6) 0

[B]

問 5. 1^i の表式として正しいものを選べ。ただし、k は任意の整数、i は虚数単位とする。

(1) -1　　(2) $\frac{\pi}{2}i$　　(3) $e^{-2k\pi}$

(4) $e^{-\frac{k\pi}{2}}$　　(5) $-1 + \pi i$　　(6) $2k\pi i$

問 6. 次の周回積分の値として正しいものを選べ。

$$\oint_{\mathrm{C}} \frac{dz}{z^2 + 1}$$

ただし、C は複素平面で原点を中心とする半径 $|z| = 2$ の円を反時計回りに 1 周するものとする。

(1) $\pi - \pi i$　　(2) 2π　　(3) π

(4) 0　　(5) $-\pi i$　　(6) $-2\pi i$

(次頁に続く)

問 7. $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ の表式として正しいものを選べ。

$$f(x) = e^{-a|x|}$$

ただし、$a > 0$、$F(k) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$ とする。

(1) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ia}{a^2+k^2}$　(2) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}$　(3) $-\sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ak^2}$　(5) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-iak^2}$　(6) $-\sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-(a^2+k^2)}$

[C]

問 8. 次の完全微分型微分方程式の解の表式として正しいものを選べ。ただし C は任意の定数とする。

$$(x + 4y)dx + (4x + 3y)dy = 0$$

(1) $2x^2 + 5xy + 3y^2 = C$　(2) $x^2 - 7xy - 2y^2 = C$

(3) $2x^2 - 3xy - y^2 = C$　(4) $3x^2 + xy + 5y^2 = C$

(5) $x^2 + 8xy + 3y^2 = C$　(6) $3x^2 - 4xy - 7y^2 = C$

問 9. $f(x)$ は次の関係式を満たすとする。

$$f(x) = 1 + \int_0^x (t - x) f(t) dt$$

$f(0)$, $f'(0)$ を計算の上、$f(x)$ の満たす微分方程式が導出できる。これを解き $f(x)$ の表式として正しいものを選べ。

(1) $\cos x$　(2) $\sin x$　(3) $\cos x + \sin x$

(4) $\cos x - \sin x$　(5) e^{ix}　(6) e^{-ix}

問 10. 次の積分の値として正しいものを選べ。ただし、$a, b > 0$ とする。

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(ax^2+by^2)} dx dy$$

(1) $\frac{ab}{\pi}$　(2) $\frac{4\sqrt{ab}}{\pi}$　(3) $\frac{\pi}{\sqrt{ab}}$　(4) $\frac{\pi}{ab}$　(5) $\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}$　(6) $\frac{\pi}{4ab}$

I

Answer five out of the following ten questions choosing at least one question from each of the groups [A], [B], and [C]. Write the question numbers clearly on the answer sheet. Choose your answer from the options (1)-(6).

[A]

Q1. Evaluate the following determinant.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

(1) 8 (2) 12 (3) 16 (4) -8 (5) -12 (6) -16

Q2. Find the inverse matrix of the following matrix, and calculate the sum of all the inverse matrix elements.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(1) $\frac{3}{13}$ (2) $\frac{5}{13}$ (3) $\frac{7}{13}$ (4) $\frac{9}{13}$ (5) $\frac{11}{13}$ (6) 1

Q3. Point X(-2,0,z) is on a plane passing through the three points A(1,1,3), B(0,-2,2), and C(3,-1,0). Find z.

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5 (6) 6

(Continued on the next page)

Q4. Let $\vec{r} = (x, y, z)$ $[r \equiv |\vec{r}|]$ be a three-dimensional position vector and $\vec{a}$ a constant vector. Evaluate the following expression.

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{a} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \right]$$

(1) $\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$	(2) $-\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$	(3) $\frac{3\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^5}$
(4) $-\frac{3\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^5}$	(5) $\vec{a} \cdot (\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{3\vec{r}}{r^5})$	(6) 0

[B]

Q5. Let k be an integer number and i the imaginary unit. Choose the expression that equates to 1^i.

(1) -1	(2) $\frac{\pi}{2}i$	(3) $e^{-2k\pi}$
(4) $e^{-\frac{k\pi}{2}}$	(5) $-1 + \pi i$	(6) $2k\pi i$

Q6. Evaluate the following integral where the contour C traces the circle $|z| = 2$ centered at the origin once in the counterclockwise direction on the complex plane.

$$\oint_{\mathrm{C}} \frac{dz}{z^2 + 1}$$

(1) $\pi - \pi i$	(2) 2π	(3) π
(4) 0	(5) $-\pi i$	(6) $-2\pi i$

(Continued on the next page)

Q7. Calculate the Fourier transform $F(k)$ of $f(x) = e^{-a|x|}$, where $F(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$ and $a > 0$.

(1) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{ia}{a^2+k^2}$ (2) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}$ (3) $-\sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ak^2}$ (5) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-iak^2}$ (6) $-\sqrt{\frac{1}{\pi}} e^{-(a^2+k^2)}$

[C]

Q8. Solve the following exact differential equation, where C is a constant number.

$$(x + 4y)dx + (4x + 3y)dy = 0$$

(1) $2x^2 + 5xy + 3y^2 = C$ (2) $x^2 - 7xy - 2y^2 = C$

(3) $2x^2 - 3xy - y^2 = C$ (4) $3x^2 + xy + 5y^2 = C$

(5) $x^2 + 8xy + 3y^2 = C$ (6) $3x^2 - 4xy - 7y^2 = C$

Q9. $f(x)$ satisfies the following relation.

$$f(x) = 1 + \int_0^x (t - x) f(t) dt$$

Calculate $f(0)$ and $f'(0)$, derive the differential equation of $f(x)$, and then find $f(x)$.

(1) $\cos x$ (2) $\sin x$ (3) $\cos x + \sin x$

(4) $\cos x - \sin x$ (5) e^{ix} (6) e^{-ix}

Q10. Evaluate the following integral. Let $a, b > 0$.

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(ax^2+by^2)} dx dy$$

(1) $\frac{ab}{\pi}$ (2) $\frac{4\sqrt{ab}}{\pi}$ (3) $\frac{\pi}{\sqrt{ab}}$ (4) $\frac{\pi}{ab}$ (5) $\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}$ (6) $\frac{\pi}{4ab}$

Ⅱ

[A]

問1. 質量mの質点が速度$\vec{v}$で運動している。この質点にかかる力$\vec{F}$が$\vec{r}\times\vec{F}=\vec{0}$を満たすとき、常に成り立つ関係式として正しいものを以下から一つ選べ。ただし、$\vec{r}$は質点の位置ベクトルである。また、選択肢中のtは時間を表し、mはtによらず一定とする。

(1) $m\vec{v}=\vec{0}$　(2) $m(\vec{r}\cdot\vec{v})=0$　(3) $m(\vec{r}\times\vec{v})=\vec{0}$

(4) $m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{0}$　(5) $m\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{v})=0$　(6) $m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v})=\vec{0}$

問2. 三次元直交座標$\vec{x}=(x,y,z)$と正準共役な運動量$\vec{p}=\left(p_x,p_y,p_z\right)$を用いて、
$\vec{L}=\left(L_x,L_y,L_z\right)=\left(yp_z-zp_y,zp_x-xp_z,xp_y-yp_x\right)$が与えられている。
L_xとL_yのポアッソン括弧式$\left\{L_x,L_y\right\}$の計算結果として正しいものを以下から一つ選べ。

(1) $\left(yp_z-zp_y\right)(zp_x-xp_z)$　(2) xy　(3) p_xp_y

(4) xp_y-yp_x　(5) xp_y+yp_x　(6) xyp_xp_y

問3. 地球の表面から水平方向に初速vで質点を投射する。質点が地表に落下することなく、また、無限遠方に飛び去ることなく周回するためのvの条件として正しいものを以下から一つ選べ。ただし、地球は質量M、半径Rの球形であるとし、空気抵抗と地球の自転の効果を無視する。ここで、Gは万有引力定数である。

(1) $\sqrt{\frac{GM}{2R}}<v<\sqrt{\frac{GM}{R}}$　(2) $\sqrt{\frac{GM}{2R}}<v<\sqrt{\frac{2GM}{R}}$　(3) $\sqrt{\frac{GM}{2R}}<v<2\sqrt{\frac{GM}{R}}$

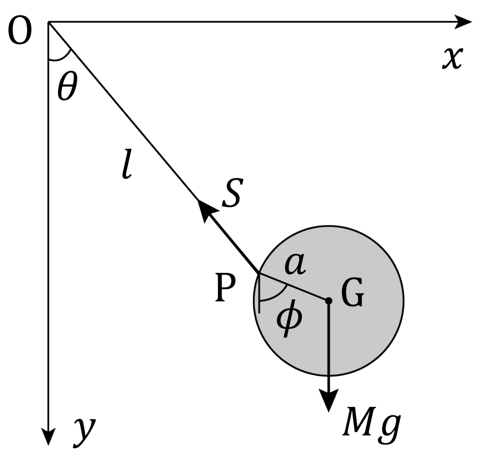
(4) $\sqrt{\frac{GM}{R}}<v<\sqrt{\frac{2GM}{R}}$　(5) $\sqrt{\frac{GM}{R}}<v<2\sqrt{\frac{GM}{R}}$　(6) $\sqrt{\frac{2GM}{R}}<v<2\sqrt{\frac{GM}{R}}$

[B]

下図に示す通り、一様な剛体球と糸からなる振り子を考える。糸の一端は点Oに固定されている。また、球はその表面上の点Pで糸のもう片方の端とつながっており、Pのまわりを自由に回転することができる。球の半径と質量はそれぞれ a、M である。また、糸の長さは l で、その質量は無視できるものとする。

ここでは特に、糸をたるませずに球を持ち上げて静かに離し、振り子の振動および球の回転が点Oを含む同一の鉛直面内で行われる場合のみを考える。またその際、常に糸はたるまず、球に巻き付くこともないとする。

以下、原点を点Oにとり、ここから水平方向に x 軸、鉛直下方に y 軸をとる。また、y 軸と直線OPのなす角を θ、y 軸と直線PGのなす角を ϕ とする。ただし、Gは球の重心である。重力加速度を g、糸の張力を S とする。さらに、ある変数 X の時間についての1階、2階微分をそれぞれ $\dot{X}$、$\ddot{X}$ で表す。このとき、以下の問に答えよ。



問1. 球の重心Gの x 方向の運動方程式として正しいものを以下から一つ選べ。ただし、x_G はGの x 座標である。

（1）$M\ddot{x}_G = -S\sin\theta$　　（2）$M\ddot{x}_G = -S\sin\theta + Mg$

（3）$M\ddot{x}_G = -S\sin\phi$　　（4）$M\ddot{x}_G = -S\sin\phi + Mg$

（5）$M\ddot{x}_G = -S\sin(\phi-\theta)$　　（6）$M\ddot{x}_G = -S\sin(\phi-\theta) + Mg$

（次頁につづく）

問2. 球の重心 G の y 方向の運動方程式として正しいものを以下から一つ選べ。ただし、y_{G} は G の y 座標である。

(1) $M\ddot{y}_{\mathrm{G}} = -S\cos\theta$ (2) $M\ddot{y}_{\mathrm{G}} = -S\cos\theta + Mg$
(3) $M\ddot{y}_{\mathrm{G}} = -S\cos\phi$ (4) $M\ddot{y}_{\mathrm{G}} = -S\cos\phi + Mg$
(5) $M\ddot{y}_{\mathrm{G}} = -S\cos(\phi-\theta)$ (6) $M\ddot{y}_{\mathrm{G}} = -S\cos(\phi-\theta) + Mg$

問3. 球の重心 G のまわりの慣性モーメント I として正しいものを以下から一つ選べ。

(1) $I = \frac{2}{3}Ma^2$ (2) $I = \frac{2}{3}Ml^2$ (3) $I = \frac{2}{3}M(a+l)^2$
(4) $I = \frac{2}{5}Ma^2$ (5) $I = \frac{2}{5}Ml^2$ (6) $I = \frac{2}{5}M(a+l)^2$

問4. 球の重心 G のまわりの回転の運動方程式として正しいものを以下から一つ選べ。ただし、I は問 3 で得られた慣性モーメントである。

(1) $I\ddot{\phi} = -Sa\sin\theta$ (2) $I\ddot{\phi} = -Sa\sin\theta + Mga$
(3) $I\ddot{\phi} = -Sa\sin\phi$ (4) $I\ddot{\phi} = -Sa\sin\phi + Mga$
(5) $I\ddot{\phi} = -Sa\sin(\phi-\theta)$ (6) $I\ddot{\phi} = -Sa\sin(\phi-\theta) + Mga$

以下、問 3 で得られた慣性モーメント I を用いて $\kappa \equiv \sqrt{I/M}$ と定義し、これを用いて $\alpha \equiv \kappa^2/(al)$、$\beta \equiv a/l$ とする。

問5. $\ddot{\phi}$ の満たすべき方程式として正しいものを以下から一つ選べ。ただし、θ、ϕ が十分小さいとして、θ、ϕ、$\dot{\theta}$、$\dot{\phi}$、$\ddot{\theta}$、$\ddot{\phi}$ の 2 次以上を無視する。

(1) $\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\frac{1}{\alpha}(\theta-\phi)$ (2) $\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\frac{1}{\beta}(\theta-\phi)$

(3) $\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\frac{1}{\alpha}[(\alpha+\beta)\theta-\beta\phi]$ (4) $\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\frac{1}{\beta}[(\alpha+\beta)\theta-\alpha\phi]$

(5) $\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\frac{1}{\alpha}[(\alpha-\beta)\theta+\beta\phi]$ (6) $\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\frac{1}{\beta}[(\alpha-\beta)\theta-\alpha\phi]$

（次頁につづく）

問6. $\ddot{\theta}$ の満たすべき方程式として正しいものを以下から一つ選べ。ただし、θ、ϕ が十分小さいとして、θ、ϕ、$\dot{\theta}$、$\dot{\phi}$、$\ddot{\theta}$、$\ddot{\phi}$ の 2 次以上を無視する。

(1) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{1}{\alpha}(\theta - \phi)$

(2) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{1}{\beta}(\theta - \phi)$

(3) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{1}{\alpha}[(\alpha + \beta)\theta - \beta\phi]$

(4) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{1}{\beta}[(\alpha + \beta)\theta - \alpha\phi]$

(5) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{1}{\alpha}[(\alpha - \beta)\theta + \beta\phi]$

(6) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{1}{\beta}[(\alpha - \beta)\theta - \alpha\phi]$

問7. 問 5 と問 6 で得られた 2 つの微分方程式を対角化して得られる基準振動の周期 T は次の形で与えられる。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}\left(A \pm \sqrt{A^2 - 4B}\right)}$$

A、Bの組み合わせとして正しいものを以下から一つ選べ。

(1) $A = 1 + \alpha + \beta, \quad B = \alpha$

(2) $A = 1 + \alpha + \beta, \quad B = \beta$

(3) $A = 1 - \alpha + \beta, \quad B = \alpha$

(4) $A = 1 - \alpha + \beta, \quad B = \beta$

(5) $A = 1 + \alpha - \beta, \quad B = \alpha$

(6) $A = 1 + \alpha - \beta, \quad B = \beta$

II

[A]

Q1. A point mass of mass m is moving with velocity $\vec{v}$. Consider force $\vec{F}$ acting on this point mass such that $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$, where $\vec{r}$ is the position vector of the point mass. Which one of the following expressions is always true? Here, t is time and m is independent of t.

(1) $m\vec{v} = \vec{0}$ (2) $m(\vec{r} \cdot \vec{v}) = 0$ (3) $m(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{0}$

(4) $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ (5) $m\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{v}) = 0$ (6) $m\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{0}$

Q2. Let $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (yp_z - zp_y, zp_x - xp_z, xp_y - yp_x)$ with position $\vec{x} = (x, y, z)$ in three-dimensional Cartesian coordinates and conjugate momentum $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Which one of the following is the correct evaluation of the Poisson bracket of L_x and L_y, $\{L_x, L_y\}$?

(1) $(yp_z - zp_y)(zp_x - xp_z)$ (2) xy (3) $p_x p_y$

(4) $xp_y - yp_x$ (5) $xp_y + yp_x$ (6) $xyp_x p_y$

Q3. A point mass is launched from the surface of the earth in the horizontal direction with initial velocity v. Which one of the following gives the condition so that the point mass keeps orbiting around the earth without falling to the ground or flying away to infinity? Here, G is the gravitational constant. Assume that the earth is a sphere of radius R with mass M and that air resistance and any effect of the earth's rotation can be neglected.

(1) $\sqrt{\frac{GM}{2R}} < v < \sqrt{\frac{GM}{R}}$ (2) $\sqrt{\frac{GM}{2R}} < v < \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ (3) $\sqrt{\frac{GM}{2R}} < v < 2\sqrt{\frac{GM}{R}}$

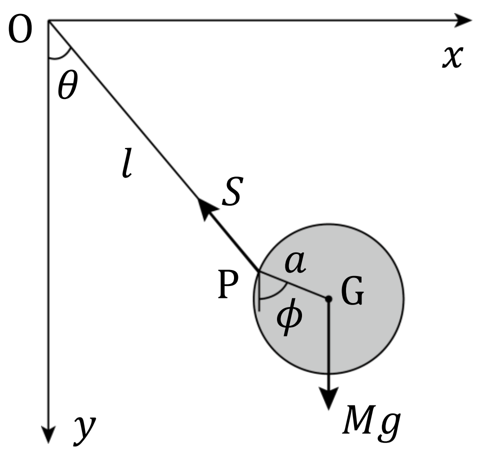
(4) $\sqrt{\frac{GM}{R}} < v < \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ (5) $\sqrt{\frac{GM}{R}} < v < 2\sqrt{\frac{GM}{R}}$ (6) $\sqrt{\frac{2GM}{R}} < v < 2\sqrt{\frac{GM}{R}}$

[B]

As shown in the figure below, consider a pendulum made of a uniform rigid sphere and a piece of string. One end of the string is fixed to the point O. The sphere is attached to the other end of the string at the point P on its surface and can freely rotate around the point P. The radius and mass of the sphere are a and M, respectively. The length of the string is l and its mass is negligible.

Consider the following scenario: the sphere is released gently with the string taut so that the pendulum oscillates and the sphere rotates in the plane containing the point O. In addition, the string never slacks or winds around the sphere.

The origin is set to the point O and the x- and the y-axes are taken in the horizontal and vertically downward directions, respectively. θ is the angle between the y-axis and the line OP. ϕ is the angle between the y-axis and the line PG, where G is the position of the sphere's center of gravity. Let g and S be the gravitational acceleration and the string tension, respectively. $\dot{X}$ and $\ddot{X}$ denote the first and the second time derivatives of any given variable X, respectively. Answer the following questions.



Q1. Which one of the following is the equation of motion of the sphere's center of gravity G in the x-direction? Here, x_G is the x-coordinate of G.

(1) $M\ddot{x}_G = -S\sin\theta$
(2) $M\ddot{x}_G = -S\sin\theta + Mg$
(3) $M\ddot{x}_G = -S\sin\phi$
(4) $M\ddot{x}_G = -S\sin\phi + Mg$
(5) $M\ddot{x}_G = -S\sin(\phi - \theta)$
(6) $M\ddot{x}_G = -S\sin(\phi - \theta) + Mg$

(Continued on the next page)

Q2. Which one of the following is the equation of motion of the sphere's center of gravity G in the y-direction? Here, y_G is the y-coordinate of G.

(1) $M\ddot{y}_G = -S\cos\theta$　　(2) $M\ddot{y}_G = -S\cos\theta + Mg$
(3) $M\ddot{y}_G = -S\cos\phi$　　(4) $M\ddot{y}_G = -S\cos\phi + Mg$
(5) $M\ddot{y}_G = -S\cos(\phi - \theta)$　　(6) $M\ddot{y}_G = -S\cos(\phi - \theta) + Mg$

Q3. Which one of the following is the moment of inertia, I, of the sphere around the sphere's gravitational center G?

(1) $I = \frac{2}{3}Ma^2$　　(2) $I = \frac{2}{3}Ml^2$　　(3) $I = \frac{2}{3}M(a+l)^2$
(4) $I = \frac{2}{5}Ma^2$　　(5) $I = \frac{2}{5}Ml^2$　　(6) $I = \frac{2}{5}M(a+l)^2$

Q4. Which one of the following is the equation of motion for the sphere's rotation around the sphere's gravitational center G? Here, I is the moment of inertia given in Q3.

(1) $I\ddot{\phi} = -Sa\sin\theta$　　(2) $I\ddot{\phi} = -Sa\sin\theta + Mga$
(3) $I\ddot{\phi} = -Sa\sin\phi$　　(4) $I\ddot{\phi} = -Sa\sin\phi + Mga$
(5) $I\ddot{\phi} = -Sa\sin(\phi - \theta)$　　(6) $I\ddot{\phi} = -Sa\sin(\phi - \theta) + Mga$

Let $\alpha \equiv \kappa^2/(al)$ and $\beta \equiv a/l$, where $\kappa \equiv \sqrt{I/M}$, with the moment of inertia I given in Q3.

Q5. Which one of the following equations does $\ddot{\phi}$ satisfy? Here, θ and ϕ are assumed to be sufficiently small so that the quadratic and higher order terms of θ, ϕ, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\ddot{\theta}$ and $\ddot{\phi}$ can be neglected.

(1) $\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\frac{1}{\alpha}(\theta - \phi)$　　(2) $\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\frac{1}{\beta}(\theta - \phi)$

(3) $\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\frac{1}{\alpha}[(\alpha + \beta)\theta - \beta\phi]$　　(4) $\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\frac{1}{\beta}[(\alpha + \beta)\theta - \alpha\phi]$

(5) $\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\frac{1}{\alpha}[(\alpha - \beta)\theta + \beta\phi]$　　(6) $\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\frac{1}{\beta}[(\alpha - \beta)\theta - \alpha\phi]$

(Continued on the next page)

Q6. Which one of the following equations does $\ddot{\theta}$ satisfy? Here, θ and ϕ are assumed to be sufficiently small so that the quadratic and higher order terms of θ, ϕ, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\ddot{\theta}$ and $\ddot{\phi}$ can be neglected.

(1) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{1}{\alpha}(\theta - \phi)$

(2) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{1}{\beta}(\theta - \phi)$

(3) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{1}{\alpha}[(\alpha + \beta)\theta - \beta\phi]$

(4) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{1}{\beta}[(\alpha + \beta)\theta - \alpha\phi]$

(5) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{1}{\alpha}[(\alpha - \beta)\theta + \beta\phi]$

(6) $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\frac{1}{\beta}[(\alpha - \beta)\theta - \alpha\phi]$

Q7. The periods of the normal modes, which are obtained by diagonalizing the two differential equations given in Q5 and Q6, can be written as follows:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}\left(A \pm \sqrt{A^2 - 4B}\right)}.$$

Which one of the following combinations of A and B is correct?

(1) $A = 1 + \alpha + \beta, \quad B = \alpha$

(2) $A = 1 + \alpha + \beta, \quad B = \beta$

(3) $A = 1 - \alpha + \beta, \quad B = \alpha$

(4) $A = 1 - \alpha + \beta, \quad B = \beta$

(5) $A = 1 + \alpha - \beta, \quad B = \alpha$

(6) $A = 1 + \alpha - \beta, \quad B = \beta$

III

[A]

問1.　主量子数n、方位量子数l、磁気量子数mの関係を以下の不等式で書いたとき、それぞれ(1), (2), (3), (4)にあてはまるものを(a)から(j) の中から選べ。

$$(1) \leq (2) \leq (3) \leq (4)$$

(a)$-l$　(b)$-l-1$　(c) l　(d) $l+1$　(e) $-m$　(f) m　(g) $m-1$　(h) n

(i) $n+1$　(j) $n-1$

問2.　水素様原子の主量子数 n のエネルギー順位の縮退の数を(a)から(d)の中から選べ。

(a)　n　(b)　$n(n+1)$　(c) n^n　(d) n^2

問3.　位置演算子を$\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$、運動量演算子を$\hat{\boldsymbol{p}} = \left(\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z\right)$、軌道角運動量演算子を$\hat{\boldsymbol{L}} = \left(\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z\right)$として以下の交換関係の結果を(a)から(m)の中から選べ。

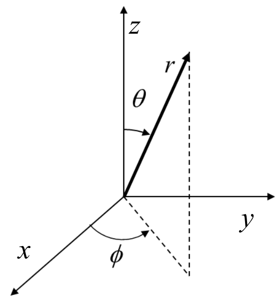
(1) $[\hat{x}, \hat{p}_y]$,　(2) $[\hat{z}, \hat{p}_z]$,　(3) $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$,

(a)0　(b)$i\hbar$　(c) $-i\hbar$　(d) $i\hbar\hat{x}$　(e) $-i\hbar\hat{x}$　(f) $i\hbar\hat{z}$　(g) $-i\hbar\hat{z}$　(h) $-i\hbar\hat{L}_x$

(i) $-i\hbar\hat{L}_y$　(j) $-i\hbar\hat{L}_z$　(k) $i\hbar\hat{L}_x$　(l) $i\hbar\hat{L}_y$　(m) $i\hbar\hat{L}_z$

[B]

水素原子の第一励起状態の 2*s*, 2*p* 状態には(n, l, m)=(2, 0, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 1, -1)の 4 重の縮退がある。水素原子を一様な静電場の中におくと、この 4 重の縮退は部分的に解けることが知られている。原子核を原点とした右図のような r, θ, ϕで表される極座標で考え、a_0をボーア半径、電子の電荷を$-e$として以下の問いに答えよ。



問1.　極座標表記での 2*s*, 2*p* 状態の$|n\ l\ m\rangle = |2\ 0\ 0\rangle, |2\ 1\ 1\rangle, |2\ 1\ 0\rangle, |2\ 1-1\rangle$の規格化された波動関数を(a)から(f)の２つ以上の関数の積として答えよ。

(1) $|2\ 0\ 0\rangle$,　(2) $|2\ 1\ 1\rangle$,　(3) $|2\ 1\ 0\rangle$,　(4) $|2\ 1-1\rangle$

(a)$R_{20}=\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}$,　(b)$R_{21}=\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{r}{\sqrt{3}a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}$,　(c)$Y_{00}(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$,

(d)$Y_{10}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$,　(e)$Y_{11}(\theta,\phi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$,　(f)$Y_{1-1}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\phi}$

問2.　電場が+z 方向を向いている場合[$\boldsymbol{E}$=(0, 0, E)]の一次の摂動での摂動ハミルトニアン$\widehat{H}'$を(a)から(j)のうち必要なものの積として表せ。

(a) e　(b) E　(c) $\cos\theta$　(d) $\sin\theta$　(e) $\tan\theta$　(f) x　(g) y　(h) z　(i) r　(j) -1

問3.　(1)から(6)で示した$\widehat{H}'$の行列要素を計算し、結果をそれぞれ(a)から(l)から選べ

(1) $\langle 2\ 0\ 0\,|\widehat{H}'|2\ 1\ 1\rangle$　(2) $\langle 2\ 0\ 0\,|\,\widehat{H}'|2\ 1-1\rangle$ (3) $\langle 2\ 0\ 0\,|\,\widehat{H}'|2\ 1\ 0\rangle$ (4) $\langle 2\ 1\ 0\,|\,\widehat{H}'|2\ 1\ 1\rangle$

(5) $\langle 2\ 1\ 0\,|\widehat{H}'|2\ 1-1\rangle$　(6) $\langle 2\ 1\ 1\,|\,\widehat{H}'|2\ 1-1\rangle$

必要に応じてαが正定数、n が 1 以上の整数の時成り立つ以下の積分公式を用いても良い。

$$\int_0^\infty r^n e^{-\alpha r}dr=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

(a)0, (b)$\frac{\sqrt{3}}{4\pi}eEa_0$, (c)$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}eEa_0$, (d)$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}eEa_0$, (e)$\frac{1}{\sqrt{3}}eEa_0$, (f)$-\frac{1}{\sqrt{3}}eEa_0$, (g)$-\sqrt{3}eEa_0$, ($h$)$\sqrt{3}eEa_0$,

(i)$3eEa_0$, (j)$-3eEa_0$, (k)$-3\sqrt{3}eEa_0$, (l)$3\sqrt{3}eEa_0$

（次頁につづく）

問4.　この摂動でのエネルギーの変化を次の(a)から(l)の中からすべて選べ

(a)0, (b)$\frac{\sqrt{3}}{4\pi}eEa_0$, (c)$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}eEa_0$, (d)$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}eEa_0$, (e)$\frac{1}{\sqrt{3}}eEa_0$, (f)$-\frac{1}{\sqrt{3}}eEa_0$, (g)$-\sqrt{3}eEa_0$, $(h)\sqrt{3}eEa_0$,

$(i)3eEa_0$, $(j)-3eEa_0$, (k)$-3\sqrt{3}eEa_0$, $(l)3\sqrt{3}eEa_0$

問5.　この摂動による最も低いエネルギーを持つ規格化した固有状態を以下の(a)から(o)中から選べ。

(a) $|2\ 0\ 0\rangle$ (b) $|2\ 1\ 0\rangle$ (c) $|2\ 1\ 1\rangle$ (d) $|2\ 1-1\rangle$ (e)$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 0\ 0\rangle+|2\ 1\ 0\rangle)$ (f) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 0\ 0\rangle+|2\ 1\ 1\rangle)$

(g) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 0\ 0\rangle+|2\ 1-1\rangle)$ (h) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 1\ 0\rangle+|2\ 1\ 1\rangle)$ (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 1\ 0\rangle+|2\ 1-1\rangle)$

(j) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 1\ 1\rangle+|2\ 1-1\rangle)$ (k)$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 0\ 0\rangle-|2\ 1\ 0\rangle)$ (l)$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 0\ 0\rangle-|2\ 1\ 1\rangle)$

$(m)\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 0\ 0\rangle-|2\ 1-1\rangle)$ (m) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 1\ 0\rangle-|2\ 1\ 1\rangle)$ (o) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 1\ 0\rangle-|2\ 1-1\rangle)$

III

[A]

Q1. Consider the relationships between principal quantum number, n, azimuthal quantum number, l, and magnetic quantum number, m, given by inequality expressions. Choose the correct expressions from (a) to (j) for (1), (2), (3), and (4) in the inequality.

$$(1) \leq (2) \leq (3) \leq (4)$$

(a) $-l$ (b) $-l-1$ (c) l (d) $l+1$ (e) $-m$ (f) m (g) $m-1$ (h) n
(i) $n+1$ (j) $n-1$

Q2. What is the number of degeneracies for the energy level a hydrogen-like atom with principal quantum number n.

(a) n (b) $n(n+1)$ (c) n^n (d) n^2

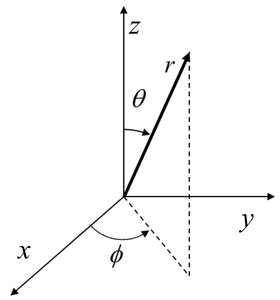
Q3 Choose the correct expression from (a) to (j) for the commutators given in (1), (2) and (3), where $\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ is the coordinate operator, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$ the momentum operator, and $\hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ the angular momentum operator.

(1) $[\hat{x}, \hat{p}_y]$, (2) $[\hat{z}, \hat{p}_z]$, (3) $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$,

(a) 0 (b) $i\hbar$ (c) $-i\hbar$ (d) $i\hbar\hat{x}$ (e) $-i\hbar\hat{x}$ (f) $i\hbar\hat{z}$ (g) $-i\hbar\hat{z}$ (h) $-i\hbar\hat{L}_x$
(i) $-i\hbar\hat{L}_y$ (j) $-i\hbar\hat{L}_z$ (k) $i\hbar\hat{L}_x$ (l) $i\hbar\hat{L}_y$ (m) $i\hbar\hat{L}_z$

[B]

There are the four degenerate states (n, l, m)=(2, 0, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 1, -1) for the n=2 state of the hydrogen atom. The degeneracy can be partly lifted in a uniform electrostatic field. We define the polar coordinates, where (r, θ, ϕ) gives the radial distance, azimuthal angle, and polar angle, as shown in the figure to the right. The nucleus of the hydrogen atom is located at the origin. The Bohr radius is a_0, and the electron charge is $-e$. Answer the following questions.



Q1. Express the normalized wave functions for each of the degenerate states for n=2 as a product of at least two of the options (a) to (f).

(1) $|2\ 0\ 0\rangle$, (2) $|2\ 1\ 1\rangle$, (3) $|2\ 1\ 0\rangle$, (4) $|2\ 1 -1\rangle$

$$(a) R_{20} = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2-\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}, \quad (b) R_{21} = \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{r}{\sqrt{3}a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}, \quad (c) Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$(d) Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad (e) Y_{11}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}, \quad (f) Y_{1-1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\phi}$$

Q2. Calculate the Hamiltonian for the first order perturbation by a constant electric field parallel to the +z axis, $\boldsymbol{E}$=(0, 0, E). Express the Hamiltonian as a product of at least two terms listed under (a) to (j).

(a) e (b) E (c) $\cos\theta$ (d) $\sin\theta$ (e) $\tan\theta$ (f) x (g) y (h) z (i) r (j) -1

Q3. Evaluate the matrix elements of (1), (2), (3), (4), (5), and (6), choosing the correct expressions from (a) to (l).

(1) $\langle 2\ 0\ 0\,|\hat{H}'|2\ 1\ 1\rangle$ (2) $\langle 2\ 0\ 0\,|\,\hat{H}'|2\ 1-1\rangle$ (3) $\langle 2\ 0\ 0\,|\,\hat{H}'|2\ 1\ 0\rangle$ (4) $\langle 2\ 1\ 0\,|\,\hat{H}'|2\ 1\ 1\rangle$
(6) $\langle 2\ 1\ 0\,|\hat{H}'|2\ 1-1\rangle$ (6) $\langle 2\ 1\ 1\,|\,\hat{H}'|2\ 1-1\rangle$

If necessary, use the following integral formula

$$\int_0^{\infty} r^n e^{-\alpha r} dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \ (n = 1,2,3 \cdots\cdots)$$

where the α is a positive constant.

(a) 0, (b) $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}eEa_0$, (c) $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}eEa_0$, (d) $\sqrt{\frac{3}{4\pi}}eEa_0$, (e) $\frac{1}{\sqrt{3}}eEa_0$, (f) $-\frac{1}{\sqrt{3}}eEa_0$, (g) $-\sqrt{3}eEa_0$, (h) $\sqrt{3}eEa_0$,

(i) $3eEa_0$, (j) $-3eEa_0$, (k) $-3\sqrt{3}eEa_0$, (l) $3\sqrt{3}eEa_0$

(Continued on the next page)

Q4. Choose from (a) to (l) below all of the energy variations that occur as a result of the perturbation.

(a)0, (b)$\frac{\sqrt{3}}{4\pi}eEa_0$, (c)$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}eEa_0$, (d)$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}eEa_0$, (e)$\frac{1}{\sqrt{3}}eEa_0$, (f)$-\frac{1}{\sqrt{3}}eEa_0$, (g)$-\sqrt{3}eEa_0$, ($h$)$\sqrt{3}eEa_0$,

(i)$3eEa_0$, (j)$-3eEa_0$, (k)$-3\sqrt{3}eEa_0$, (l)$3\sqrt{3}eEa_0$

Q5. Choose from (a) to (o) below the normalized eigen function for the state with the lowest energy resulting from the perturbation.

(a) $|2\ 0\ 0\rangle$ (b) $|2\ 1\ 0\rangle$ (c) $|2\ 1\ 1\rangle$ (d) $|2\ 1-1\rangle$ (e)$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 0\ 0\rangle+|2\ 1\ 0\rangle)$ (f) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 0\ 0\rangle+|2\ 1\ 1\rangle)$

(g) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 0\ 0\rangle+|2\ 1-1\rangle)$ (h) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 1\ 0\rangle+|2\ 1\ 1\rangle)$ (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 1\ 0\rangle+|2\ 1-1\rangle)$

(j) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 1\ 1\rangle+|2\ 1-1\rangle)$ (k)$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 0\ 0\rangle-|2\ 1\ 0\rangle)$ (l)$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 0\ 0\rangle-|2\ 1\ 1\rangle)$

(m)$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 0\ 0\rangle-|2\ 1-1\rangle)$ (m) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 1\ 0\rangle-|2\ 1\ 1\rangle)$ (o) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\ 1\ 0\rangle-|2\ 1-1\rangle)$

Ⅳ

[A]

問 1.　ある気体中の金属球にゆっくりと正電荷を与えていったところ、金属表面の電場が 1 × 10^7 V/m になった時に放電が生じた。この時の金属球の電気量 $\boxed{a}$ × $10^{\boxed{b}}$ C を有効数字 2 桁で求め、$\boxed{a}$と $\boxed{b}$を書きなさい。ただし、金属球の半径を 0.1 m とし、この気体の誘電率を$\varepsilon = 8.87 \times 10^{-12}$ F/m とする。

問 2.　真空中で z 軸上に電荷が一様に分布している場合を考える。電荷密度が 1 × 10^{-6} C/m のとき、z 軸からの距離が 1 m での電場の大きさは $\boxed{c}$ × $10^{\boxed{d}}$ V/m となる。電場の大きさを有効数字 2 桁で求め、$\boxed{c}$と $\boxed{d}$を書きなさい。ただし、真空中の誘電率を$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m とする。

問 3.　容量が C と $2C$ のコンデンサーを使って図 1 のように接続したとき、AB 間の電気容量は、$\dfrac{\boxed{e}}{\boxed{f}}C$ となった。$\boxed{e}$と $\boxed{f}$を書きなさい。

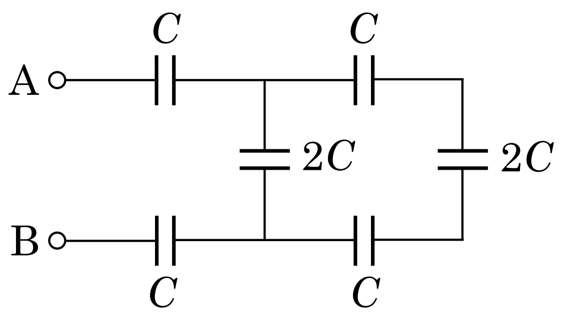


図 1

問 4.　磁束密度 0.1 T の一様な磁場中において、磁場と垂直方向に速さ $v = \boxed{g} \times 10^{\boxed{h}}$ m/s で陽子を入射したところ、陽子は半径 0.01 m の円軌道を描いた。陽子の速さを有効数字 2 桁で求め、$\boxed{g}$と $\boxed{h}$を書きなさい。陽子の質量を1.67×10^{-27} kg、電荷を1.60×10^{-19} C とする。

（次頁につづく）

[B]

断面の半径が a、長さが l の円筒状の磁性体の周りに導線を密に巻き、ソレノイドコイルを作った。コイルの単位長さあたりの巻き数を n、磁性体の透磁率をμ、ソレノイドの中心軸からの距離を r とする。また、ソレノイドコイルの両端の端子をそれぞれ端子 1、端子 2 とする。ただし、導線の太さは無視できるとし、$a \ll l$とする。

問1.　コイルに電流 I を流したとき、$r = r_1\ (r_1 < a)$でのコイル中心軸に対して円周方向のベクトルポテンシャルの大きさとして適切なものを下記の選択肢から選べ。ただし、l は十分に長いとしてコイル端の効果は無視できるとする。

(1) $\dfrac{\mu n^2 I r_1}{2}$　(2) $\dfrac{\mu n I r_1}{2}$　(3) $\dfrac{\mu n I^2 r_1}{2}$　(4) $\dfrac{\mu n^2 I}{2r_1}$

(5) $\dfrac{\mu n I}{2r_1}$　(6) $\dfrac{\mu n I^2}{2r_1}$

問2.　ソレノイドコイルの端子 1 と端子 2 を合わせるように変形させて図 2 のような環状ソレノイドコイルを作った。この環状ソレノイドコイルの自己インダクタンスを下記の選択肢から選べ。

(1) $\pi a^2 \mu n l$　(2) $\dfrac{\mu n l}{\pi a^2}$　(3) $\pi a^2 \mu n^2 l$　(4) $\dfrac{\mu n^2 l}{\pi a^2}$

(5) $\pi a^2 \mu n^2 l^2$　(6) $\dfrac{\mu n^2 l^2}{\pi a^2}$

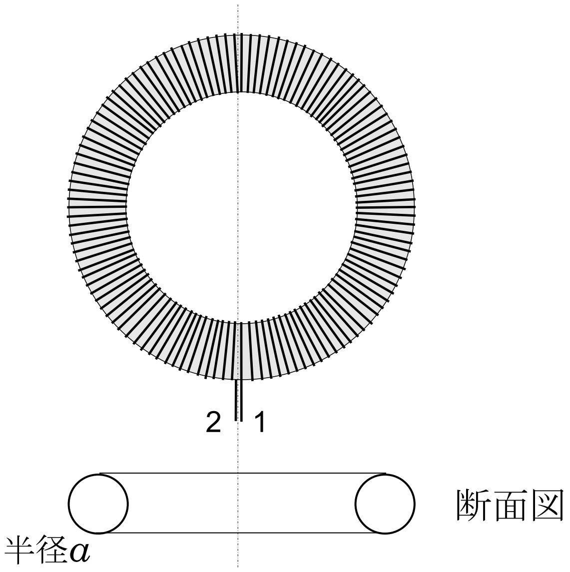


図 2

（次頁につづく）

問3.　図 3 に示すように、問 2 のコイルの端子 1、端子 2 の間に新しい端子 3 を接続した。端子 3 は、端子 1 から角度 θ の位置にあるとする。$\theta = 72°$ の時、端子 1 と端子 3 の間のコイルと端子 3 と端子 2 の間のコイルの相互インダクタンスは問 2 で求めた自己インダクタンスの何倍となるか求めよ。

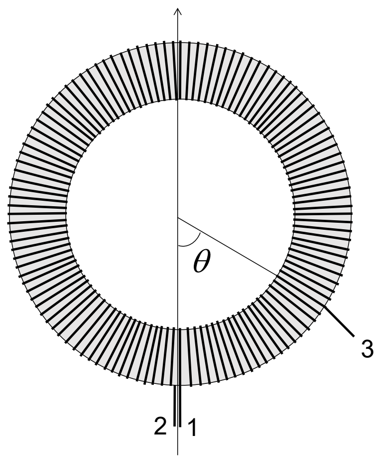


図 3

問4.　端子 1-3 間に電流 $2I$ を流し、端子 3-2 間に電流 I を流した時の環状ソレノイドコイル内の磁場のエネルギーは、端子 1-2 間に電流 I を流した時の環状ソレノイドコイル内の磁場のエネルギーの何倍になるか求めよ。

Ⅳ

[A]

Q1. Consider the case in which positive charge is slowly added to a metal sphere in a gas. When the electric field on the metal surface becomes 1×10^7 V/m, electric discharge occurs. Find the total charge $\boxed{a} \times 10^{\boxed{b}}$ C on the metal sphere to two significant figures at the time electric discharge occurred. Write down the numerical values for $\boxed{a}$ and $\boxed{b}$. Take the radius of the sphere to be 0.1 m and the permittivity of the gas to be $\varepsilon = 8.87 \times 10^{-12}$ F/m.

Q2. Consider the case in which electric charge is uniformly distributed along the z-axis in a vacuum. When the charge density is 1×10^{-6} C/m, the magnitude of the electric field at 1m from the z-axis is $\boxed{c} \times 10^{\boxed{d}}$ V/m. Find the magnitude of the electric field to two significant figures and write down the numerical values for $\boxed{c}$ and $\boxed{d}$. Take the permittivity of vacuum to be $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m.

Q3. When capacitors with a capacitance of C and $2C$ are connected as shown in Figure 1, the capacitance between A and B becomes $\frac{\boxed{e}}{\boxed{f}}C$. Write down the numerical values for $\boxed{e}$ and $\boxed{f}$.

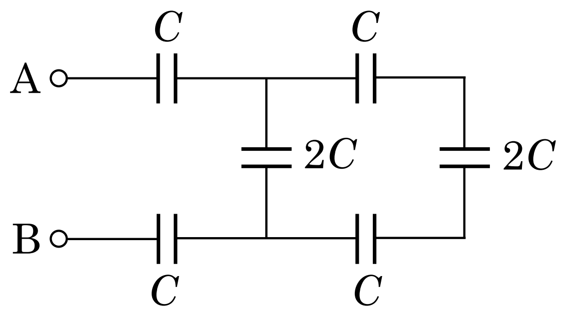


Figure 1

Q4. When a proton with velocity $v = \boxed{g} \times 10^{\boxed{h}}$ m/s is injected perpendicular to a uniform magnetic field with a magnetic field density of 0.1 T, the proton moves in a circular orbit with radius 0.01 m. Find the velocity of the proton to two significant figures and write down the numerical values for $\boxed{g}$ and $\boxed{h}$. Take the mass and the charge of the proton to be 1.67×10^{-27} kg and 1.60×10^{-19} C, respectively.

(Continued on the next page)

[B]

Consider a cylindrical magnetic material around which a conducting wire is tightly wound to make a solenoid coil. The radius of the cross section, the length and the permeability of the cylindrical magnetic material are a, l and μ, respectively. The number of turns per unit length of the solenoid coil is n. Let the distance from the central axis be r. And, let the terminals of the solenoid coil be labeled terminal 1 and terminal 2. Assume the thickness of the conducting wire is negligible and $a \ll l$.

Q1. Find the magnitude of the vector potential along the circumference at $r = r_1$ $(r_1 < a)$ around the central axis of the coil when the coil current is I, and choose the correct answer from the list below. Assume that l is very large and that the effect of the edge of the solenoid coil is negligible.

(1) $\dfrac{\mu n^2 I r_1}{2}$ (2) $\dfrac{\mu n I r_1}{2}$ (3) $\dfrac{\mu n I^2 r_1}{2}$ (4) $\dfrac{\mu n^2 I}{2r_1}$

(5) $\dfrac{\mu n I}{2r_1}$ (6) $\dfrac{\mu n I^2}{2r_1}$

Q2. The solenoid coil is bent to connect terminal 1 and terminal 2 and make a circular solenoid coil as shown in Figure 2. Find the self-inductance of the circular solenoid coil and choose the correct answer from the list below.

(1) $\pi a^2 \mu n l$ (2) $\dfrac{\mu n l}{\pi a^2}$ (3) $\pi a^2 \mu n^2 l$ (4) $\dfrac{\mu n^2 l}{\pi a^2}$

(5) $\pi a^2 \mu n^2 l^2$ (6) $\dfrac{\mu n^2 l^2}{\pi a^2}$

(Continued on the next page)

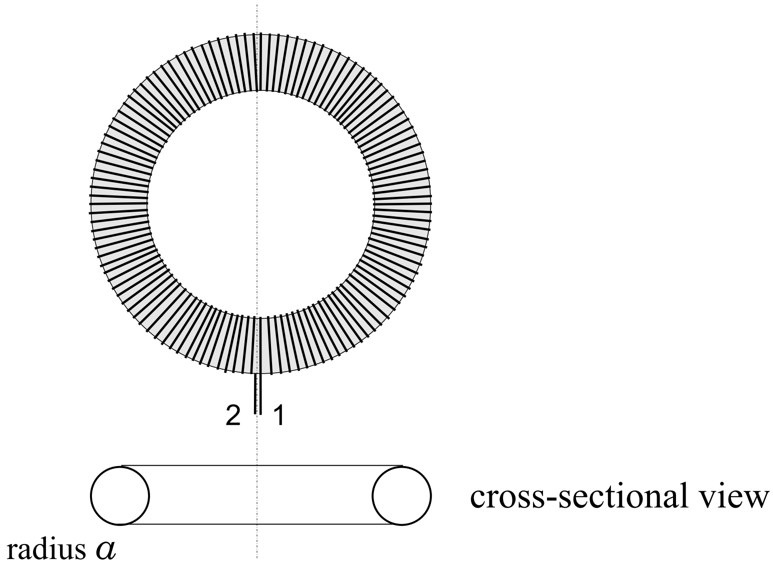


Figure 2

Q.3 A new terminal, terminal 3, is attached between terminal 1 and terminal 2 as shown in Figure 3. Let the angle formed by terminal 1 and terminal 3 be θ. How many times larger is the mutual inductance between the coil section from terminal 1 to terminal 3 and the coil section from terminal 3 to terminal 2 compared to the self-inductance found in Q2 when θ is 72 degrees.

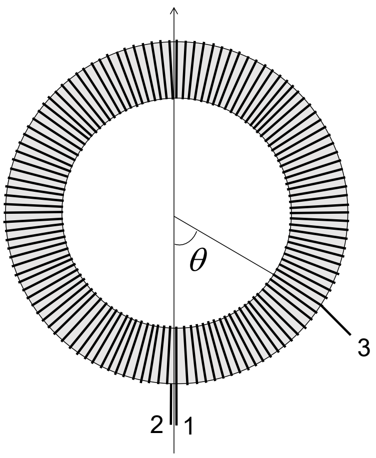


Figure 3

Q.4 How many times larger is the magnetic energy in the circular solenoid coil when an electric current $2I$ flows through the coil section 1-3 and an electric current I flows through the coil section 3-2 compared to when an electric current I flows from terminal 1 to terminal 2.

V

[A]

以下の問 1～3 の$\boxed{\text{(a)}}$～$\boxed{\text{(j)}}$に入る正しいものを各問の選択肢から選べ。但しkはボルツマン定数である。

問１． 温度Tの熱平衡状態で、エネルギーε_iにある平均粒子数$\bar{n}_i$は、

マックスウェル-ボルツマン統計：$\bar{n}_i = \dfrac{1}{\exp\{(\varepsilon_i-\mu)/kT\}+\boxed{\text{(a)}}}$

ボーズ-アインシュタイン統計： $\bar{n}_i = \dfrac{1}{\exp\{(\varepsilon_i-\mu)/kT\}+\boxed{\text{(b)}}}$

フェルミ-ディラック統計： $\bar{n}_i = \dfrac{1}{\exp\{(\varepsilon_i-\mu)/kT\}+\boxed{\text{(c)}}}$

と表される。μは化学ポテンシャルである。

（1） 0 （2） $+\frac{1}{2}$ （3） $-\frac{1}{2}$ （4） +1 （5） −1 （6） $+\frac{3}{2}$ （7） $-\frac{3}{2}$

問２． 内部エネルギーをU、エントロピーをS、温度をT、圧力をp、体積をVとした時、

エンタルピー： $H = \boxed{\text{(d)}}$

ヘルムホルツの自由エネルギー：$F = \boxed{\text{(e)}}$

ギブスの自由エネルギー： $G = \boxed{\text{(f)}}$

である。

（1） $U+TS$ （2） $U-TS$ （3） $U+pV$ （4） $U-pV$ （5） $F+TS$
（6） $F-TS$ （7） $F+pV$ （8） $F-pV$

問３． ① 粒子数N、体積V、温度Tが指定された系に許される微視的状態のうちで、エネルギーEに等しいものの出現確率が

$$P(E) = \frac{e^{-E/kT}}{\sum_E e^{-E/kT}}$$

である統計集合を$\boxed{\text{(g)}}$集合とよぶ。$\boxed{\text{(h)}}$を取扱うのに適している。

② 体積V、温度T、化学ポテンシャルμが一定に指定された系に許される微視的状態のうちで、エネルギーがEに等しく、粒子数がNに等しいものの出現確率が

$$P(N,E) = \frac{e^{(\mu N-E)/kT}}{\sum_N \sum_E e^{(\mu N-E)/kT}}$$

である統計集合を$\boxed{\text{(i)}}$集合とよぶ。$\boxed{\text{(j)}}$を取扱うのに適している。

(1)カノニカル (2)ミクロ・カノニカル (3)グランド・カノニカル
(4)粒子の出入りが自由な系 (5)外界とのエネルギーの交換が許される系
(6)外界から孤立した系

[B]

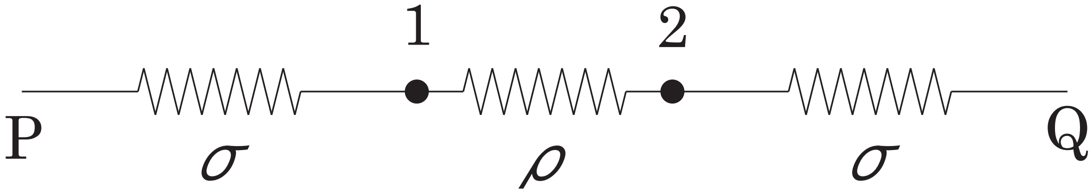
１次元空間の有限領域に閉じ込められた２粒子系 S を考え、粒子同士および外部との相互作用を下図のモデルで記述することにする。同じ質量 M を持つ粒子１と粒子２は線分 PQ 上にあり、バネ定数 ρ のバネで相互作用している。２粒子と外部との相互作用は、P と粒子１および Q と粒子２の間にあるバネ定数 σ の２つのバネで表される。２つの粒子は衝突したり、場所を入れ換えたりすることはないものとする。この系の基準振動モードは２つあり、それらを A 及び B として、角振動数はそれぞれ

$$\omega_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{\sigma}{M}}, \qquad \omega_{\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{2\rho+\sigma}{M}}$$

である。m_{A} と m_{B} を 0 以上の整数として、この系の固有状態のエネルギーは

$$E_{m_{\mathrm{A}},m_{\mathrm{B}}} = \sum_{j=\mathrm{A},\mathrm{B}} \left(m_j + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_j$$

で与えられる。ここで、h をプランク定数として、$\hbar = h/2\pi$ である。温度を T、ボルツマン定数を k とする。以下の問いに答えよ。なお、選択肢は全ての問いに共通であり、問題の最後に与えられている。約分が可能な分数は、必ず約分してから選択肢を選べ。その際、分母に 1 を入れてもよい。



図

問１．系 S の分配関数 $Z(T)$ は、

$$Z(T) = Z_{\mathrm{A}}(T)Z_{\mathrm{B}}(T)$$

（次頁につづく）

のように、２つの基準振動モード A 及び B に対する分配関数の積となる。同じ形を持つ２つの関数 $Z_j(T)$（ j は A または B ）は次の式で与えられる。

$$Z_j(T)=\frac{\exp\left(\dfrac{\boxed{\text{(a)}}}{\boxed{\text{(b)}}}\right)}{\boxed{\text{(c)}}-\exp\left(\dfrac{\boxed{\text{(d)}}}{\boxed{\text{(e)}}}\right)}$$

$\boxed{\text{(a)}}$ から $\boxed{\text{(e)}}$ に入る正しいものを選択肢の中から選べ。

系 S と同じ系が互いに独立に N 個あるとし、その全系を S_N とする。

問２．全系 S_N の分配関数 $Z_N(T)$ は次の式で与えられる。

$$Z_N(T)=\frac{Z_{\mathrm{A}}(T)^{\boxed{\text{(a)}}}Z_{\mathrm{B}}(T)^{\boxed{\text{(b)}}}}{\boxed{\text{(c)}}}\qquad（\boxed{\text{(a)}}\text{ と }\boxed{\text{(b)}}\text{ は指数）}$$

$\boxed{\text{(a)}}$ から $\boxed{\text{(c)}}$ に入る正しいものを選択肢の中から選べ。

問３．全系 S_N のヘルムホルツの自由エネルギー $F_N(T)$ は、

$$F_N(T)=F_{\mathrm{A}}(T)+F_{\mathrm{B}}(T)$$

のように、同じ形を持つ２つの関数 $F_j(T)$（ j は A または B ）の和となり、$F_j(T)$ は次の式で与えられる。

$$F_j(T)=\boxed{\text{(a)}}\left[\frac{\boxed{\text{(b)}}}{\boxed{\text{(c)}}}+\boxed{\text{(d)}}\log\left\{\boxed{\text{(e)}}-\exp\left(\frac{\boxed{\text{(f)}}}{\boxed{\text{(g)}}}\right)\right\}\right]$$

$\boxed{\text{(a)}}$ から $\boxed{\text{(g)}}$ に入る正しいものを選択肢の中から選べ。

問４．全系 S_N の内部エネルギー $U_N(T)$ は、

$$U_N(T)=U_{\mathrm{A}}(T)+U_{\mathrm{B}}(T)$$

（次頁につづく）

のように、同じ形を持つ２つの関数 $U_j(T)$（ j は A または B ）の和となり、$U_j(T)$ は次の式で与えられる。

$$U_j(T) = \boxed{\text{(a)}} \left\{ \frac{\boxed{\text{(b)}}}{\boxed{\text{(c)}}} + \frac{\boxed{\text{(d)}}}{\exp\left(\dfrac{\boxed{\text{(e)}}}{\boxed{\text{(f)}}}\right) - \boxed{\text{(g)}}} \right\}$$

$\boxed{\text{(a)}}$ から $\boxed{\text{(g)}}$ に入る正しいものを選択肢の中から選べ。

問５．２粒子と外部との相互作用に比べて粒子同士の結びつきは強く、$\sigma \ll \rho$ であるとすると、$\omega_{\mathrm{A}} \ll \omega_{\mathrm{B}}$ である。この時、全系 S_N の熱容量の近似値は、低温領域 $kT \ll \hbar\omega_{\mathrm{A}}$ では $\boxed{\text{(a)}}$、中間温度領域 $\hbar\omega_{\mathrm{A}} \ll kT \ll \hbar\omega_{\mathrm{B}}$ では $\boxed{\text{(b)}}$、高温領域 $\hbar\omega_{\mathrm{B}} \ll kT$ では $\boxed{\text{(c)}}$ である。$\boxed{\text{(a)}}$ から $\boxed{\text{(c)}}$ に入る最も適切なものを選択肢の中から選べ。

選択肢

(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 4　(6) 5

(7) -1　(8) -2　(9) -3　(10) -4　(11) -5

(12) N　(13) $N!$　(14) $(N-1)!$　(15) $(N-2)!$

(16) $\frac{1}{2}Nk$　(17) Nk　(18) $\frac{3}{2}Nk$　(19) $2Nk$　(20) $3Nk$　(21) $4Nk$

(22) $\frac{1}{2}\hbar\omega_j$　(23) $\hbar\omega_j$　(24) $\frac{3}{2}\hbar\omega_j$　(25) $2\hbar\omega_j$

(26) $-\frac{1}{2}\hbar\omega_j$　(27) $-\hbar\omega_j$　(28) $-\frac{3}{2}\hbar\omega_j$　(29) $-2\hbar\omega_j$

(30) $\frac{1}{2}kT$　(31) kT　(32) $\frac{3}{2}kT$　(33) $2kT$　(34) $3kT$　(35) $4kT$

V

[A]

Select the correct answer from the list of option that go into $\boxed{\text{(a)}}$～$\boxed{\text{(j)}}$ in questions Q1～Q3. k is the Boltzmann constant.

Q1. In thermal equilibrium at temperature T, the mean number of particles $\bar{n}_i$ with energy ε_i are given for

Maxwell-Boltzmann statistics by : $\bar{n}_i = \dfrac{1}{\exp\{(\varepsilon_i - \mu)/kT\} + \boxed{\text{(a)}}}$

Bose-Einstein statistics by : $\bar{n}_i = \dfrac{1}{\exp\{(\varepsilon_i - \mu)/kT\} + \boxed{\text{(b)}}}$

Fermi-Dirac statistics by : $\bar{n}_i = \dfrac{1}{\exp\{(\varepsilon_i - \mu)/kT\} + \boxed{\text{(c)}}}$.

μ is the chemical potential.

(1) 0 (2) $+\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}$ (4) +1 (5) -1 (6) $+\frac{3}{2}$ (7) $-\frac{3}{2}$

Q2. The enthalpy is given by $H = \boxed{\text{(d)}}$,

the Helmholtz free energy is given by $F = \boxed{\text{(e)}}$, and

the Gibbs free energy is given by $G = \boxed{\text{(f)}}$,

where the internal energy is U, the entropy is S, the temperature is T, the pressure is p and the volume is V.

(1) $U + TS$ (2) $U - TS$ (3) $U + pV$ (4) $U - pV$ (5) $F + TS$ (6) $F - TS$
(7) $F + pV$ (8) $F - pV$

Q3. (a) A system specified by particle number N, volume V and temperature T occupying a microscopic state with probability given by

$$P(E) = \frac{e^{-E/kT}}{\sum_E e^{-E/kT}}$$

is called a $\boxed{\text{(g)}}$ ensemble. Here E is energy.

This ensemble is suitable for dealing with $\boxed{\text{(h)}}$.

(b) A system specified by volume V, temperature T, and chemical potential μ (constant) occupying a microscopic state with probability given by

$$P(N, E) = \frac{e^{(\mu N - E)/kT}}{\sum_N \sum_E e^{(\mu N - E)/kT}}$$

is called a $\boxed{\text{(i)}}$ ensemble. Here E is energy and N is particle number.

This ensemble is suitable for dealing with $\boxed{\text{(j)}}$.

(1) canonical (2) micro-canonical (3) grand-canonical
(4) a system in which particles can freely enter and exit
(5) a system in which energy can be exchanged with the outside
(6) a system isolated from the outside

[B]

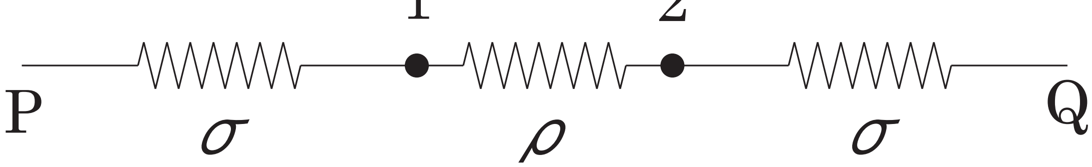
We consider a two-particle system S, which is confined to a finite region in a one-dimensional space. To describe the interactions between the two particles and between the particles and their surroundings, we use the model which is depicted in the figure below. The two particles, which are denoted as 1 and 2, are on a line segment PQ, and have the same mass M. While they are interacting with each other by a spring with spring constant ρ, they are interacting with their surroundings by the two springs with spring constant σ between P and 1 and between Q and 2. We assume that the particles do not collide or exchange their positions. There are two normal modes, A and B, in this system, and they have angular frequencies

$$\omega_{\mathrm{A}} = \sqrt{\frac{\sigma}{M}}, \qquad \omega_{\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{2\rho + \sigma}{M}},$$

respectively. With integers m_{A} and m_{B} which are larger than or equal to zero, the energies of the eigenstates of the system are given by

$$E_{m_{\mathrm{A}}, m_{\mathrm{B}}} = \sum_{j=\mathrm{A,B}} \left(m_j + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_j ,$$

where $\hbar = h/2\pi$, and h is the Planck's constant. Let T be the temperature, and k the Boltzmann constant. Answer the following questions. All questions share a common list of options which is given below the last question. Reduce fractions whenever they are reducible before choosing options. You may choose unity for the denominators.



Figure

(Continued on the next page)

Q1. The partition function $Z(T)$ of the system S is expressed as a product of the partition functions for the two normal modes, A and B,

$$Z(T) = Z_{\mathrm{A}}(T) Z_{\mathrm{B}}(T).$$

The two functions $Z_j(T)$ (j is A or B) have the same form:

$$Z_j(T) = \frac{\exp\left(\dfrac{\boxed{\text{(a)}}}{\boxed{\text{(b)}}}\right)}{\boxed{\text{(c)}} - \exp\left(\dfrac{\boxed{\text{(d)}}}{\boxed{\text{(e)}}}\right)}.$$

Fill in the blanks from $\boxed{\text{(a)}}$ to $\boxed{\text{(e)}}$ with an item for each blank chosen from the list of options.

We consider a collection of N systems which are identical to S and independent of each other. We call this entire system S_N.

Q2. The partition function $Z_N(T)$ for the entire system S_N is given by

$$Z_N(T) = \frac{Z_{\mathrm{A}}(T)^{\boxed{\text{(a)}}} Z_{\mathrm{B}}(T)^{\boxed{\text{(b)}}}}{\boxed{\text{(c)}}}. \quad \left(\boxed{\text{(a)}} \text{ and } \boxed{\text{(b)}} \text{ are exponents.}\right)$$

Fill in the blanks from $\boxed{\text{(a)}}$ to $\boxed{\text{(c)}}$ with an item for each blank chosen from the list of options.

Q3. The Helmholtz free energy $F_N(T)$ for the entire system S_N is expressed as a sum of two terms,

$$F_N(T) = F_{\mathrm{A}}(T) + F_{\mathrm{B}}(T).$$

The two functions $F_j(T)$ (j is A or B) have the same form:

$$F_j(T) = \boxed{\text{(a)}} \left[\frac{\boxed{\text{(b)}}}{\boxed{\text{(c)}}} + \boxed{\text{(d)}} \log \left\{ \boxed{\text{(e)}} - \exp\left(\frac{\boxed{\text{(f)}}}{\boxed{\text{(g)}}}\right) \right\} \right].$$

(Continued on the next page)

Fill in the blanks from $\boxed{\text{(a)}}$ to $\boxed{\text{(g)}}$ with an item for each blank chosen from the list of options.

Q4. The internal energy $U_N(T)$ of the entire system S_N is expressed as a sum of two terms,

$$U_N(T) = U_\mathrm{A}(T) + U_\mathrm{B}(T).$$

The two functions $U_j(T)$ (j is A or B) have the same form:

$$U_j(T) = \boxed{\text{(a)}} \left\{ \frac{\boxed{\text{(b)}}}{\boxed{\text{(c)}}} + \frac{\boxed{\text{(d)}}}{\exp\left(\dfrac{\boxed{\text{(e)}}}{\boxed{\text{(f)}}}\right) - \boxed{\text{(g)}}} \right\}.$$

Fill in the blanks from $\boxed{\text{(a)}}$ to $\boxed{\text{(g)}}$ with an item for each blank chosen from the list of options.

Q5. We consider the case in which the interaction between the two particles 1 and 2 is much stronger than their interactions with their surroundings by assuming $\sigma \ll \rho$. This leads to the relation $\omega_\mathrm{A} \ll \omega_\mathrm{B}$. In this case, the approximate values of the heat capacity of the entire system S_N are $\boxed{\text{(a)}}$ in the low-temperature limit ($kT \ll \hbar\omega_\mathrm{A}$), $\boxed{\text{(b)}}$ in the intermediate-temperature region ($\hbar\omega_\mathrm{A} \ll kT \ll \hbar\omega_\mathrm{B}$), and $\boxed{\text{(c)}}$ in the high-temperature limit ($\hbar\omega_\mathrm{B} \ll kT$). Find the most appropriate item from the list of options to fill in the blanks from $\boxed{\text{(a)}}$ to $\boxed{\text{(c)}}$.

(Continued on the next page)

List of options :

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4 (6) 5

(7) -1 (8) -2 (9) -3 (10) -4 (11) -5

(12) N (13) $N!$ (14) $(N-1)!$ (15) $(N-2)!$

(16) $\frac{1}{2}Nk$ (17) Nk (18) $\frac{3}{2}Nk$ (19) $2Nk$ (20) $3Nk$ (21) $4Nk$

(22) $\frac{1}{2}\hbar\omega_j$ (23) $\hbar\omega_j$ (24) $\frac{3}{2}\hbar\omega_j$ (25) $2\hbar\omega_j$

(26) $-\frac{1}{2}\hbar\omega_j$ (27) $-\hbar\omega_j$ (28) $-\frac{3}{2}\hbar\omega_j$ (29) $-2\hbar\omega_j$

(30) $\frac{1}{2}kT$ (31) kT (32) $\frac{3}{2}kT$ (33) $2kT$ (34) $3kT$ (35) $4kT$