令和3年度
筑波大学大学院　入学試験
理工情報生命学術院　数理物質科学研究群
物理学学位プログラム　試験問題

専門科目

注意事項（選択、解答についての必要な指示）

１．5 つの問題(I～V)がある。問題 II～V では、基礎問題と応用問題([A],[B])がある。全ての問題に解答せよ。解答は選択肢から適切なものを選ぶこと。問題文は、最初に日本語で、次に英語で書かれている。問題の内容は同じものである。

There are five problems (I～V). Each of problems II～V consists of basic and advanced problems ([A],[B]). Answer all of them by selecting the correct answer(s) from the list of choices. All the problems are given first in Japanese, and then in English. The contents of the problems are the same.

２．それぞれの問題につき一枚の解答用紙を用いよ。また、問題番号を明記せよ。

Use one sheet of answer paper separately for each problem. Write the problem number at the top of the sheets.

３．下書き用紙は採点の対象としない。

Draft sheets will not be marked.

I

以下の問 1 から問 5 すべてに解答せよ。

問 1　次の行列の固有値をすべて求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $1, 2, 5$　(2) $-1, 1, 3$　(3) $-2, 1, 5$
(4) $1, 1, 5$　(5) $-1, 1, 5$　(6) $1, 2, 3$

問 2　n 次正方行列 A がエルミート行列、$A^\dagger$ がその随伴行列であるとき、次のうち<u>正しくないもの</u>をすべて選べ。

(1) 行列和 $A + A^\dagger$ はエルミート行列となる。
(2) 行列積 $AA^\dagger$ はエルミート行列となる。
(3) $A + A^\dagger$ の行列要素はすべて実数となる。
(4) A^T を A の転置行列として、$A + A^T$ の行列要素はすべて実数となる。
(5) A の対角成分はすべて実数となる。

問 3　複素関数 $f(z)$ が

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

で表されるとき、$f(z)$ が正則であるために必要な条件を次の中からすべて選べ。ただし、$z = x + iy$ で、u, v は実関数である。

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$　(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}$　(3) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$
(4) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$　(5) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$　(6) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial y}$

問 4　$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ を 3 次元ベクトルとするとき、$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ と同値なものを選べ。

(1) $\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{C}$　(2) $\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
(3) $\vec{C} \cdot \vec{A} - \vec{C} \cdot \vec{B}$　(4) $\vec{C} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{B}$
(5) $-\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$　(6) $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

問 5　次の微分方程式を解け。ただし、$y \neq 0$ で、選択肢中の C は任意の定数を表す。

$$\frac{dy}{dx} + ye^{-x} = 0$$

(1) $y = x^2 + C$　(2) $y = x^3 + C$　(3) $y = \ln x + C$
(4) $y = e^{-x+C}$　(5) $y = e^{-2x+C}$　(6) $y = e^{e^{-x}+C}$

I

Answer all questions from Q1 to Q5.

Q1 Find all eigenvalues of the following matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) $1, 2, 5$ (2) $-1, 1, 3$ (3) $-2, 1, 5$
(4) $1, 1, 5$ (5) $-1, 1, 5$ (6) $1, 2, 3$

Q2 Let A be an $n \times n$ Hermitian matrix and $A^\dagger$ be its adjoint matrix. Which of the following statements are <u>not</u> correct?

(1) The sum of the matrices, $A + A^\dagger$, is a Hermitian matrix.

(2) The product of the matrices, $AA^\dagger$, is a Hermitian matrix.

(3) All matrix elements of $A + A^\dagger$ are real.

(4) All matrix elements of $A + A^T$ are real, where A^T is the transpose of A.

(5) All diagonal components of A are real.

Q3 Let $f(z)$ be a complex function of the form

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Which of the following are necessary conditions, for $f(z)$ to be regular? (Here, $z = x + iy$, and u, v are real functions).

(1) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ (2) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ (3) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$
(4) $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ (5) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ (6) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$

Q4 Let $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ be three-dimensional vectors. Which of the following expressions is equivalent to $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$?

(1) $\vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{C}$ (2) $\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$
(3) $\vec{C} \cdot \vec{A} - \vec{C} \cdot \vec{B}$ (4) $\vec{C} \cdot \vec{A} + \vec{C} \cdot \vec{B}$
(5) $-\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ (6) $\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

(Continued on the next page.)

Q5 Find the general solution of the following differential equation, where $y \neq 0$ and C is an arbitrary constant.

$$\frac{dy}{dx} + ye^{-x} = 0$$

(1) $y = x^2 + C$	(2) $y = x^3 + C$	(3) $y = \ln x + C$
(4) $y = e^{-x+C}$	(5) $y = e^{-2x+C}$	(6) $y = e^{e^{-x}+C}$

II.

[A]

問 1. xyz 直交座標空間においてポテンシャルエネルギーが $U = \frac{1}{2}\alpha(x^2 + y^2)$（$\alpha$は正の定数）で与えられるとき、このポテンシャルにより位置(x, y, z)にある質点に働く力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$として正しいものを以下より選べ。

(1) $\vec{F} = \left(\frac{1}{6}\alpha x^3,\ \frac{1}{6}\alpha y^3, 0\right)$ (2) $\vec{F} = \left(-\frac{1}{6}\alpha x^3,\ -\frac{1}{6}\alpha y^3, 0\right)$ (3) $\vec{F} = (\alpha x,\ \alpha y, 0)$
(4) $\vec{F} = \left(\alpha x + \alpha y, \alpha x + \alpha y, 0\right)$ (5) $\vec{F} = (-\alpha x, -\alpha y, 0)$

問 2. 問 1 のポテンシャル中で図 1 のように質量 m の質点を$(x, y, z) = (a, 0, 0)$（a は正の定数）の点から時刻 t=0 に y 方向に初速度 $\vec{V} = V\vec{e}_y$（V は正の定数, $\vec{e}_y$ は y 方向の単位ベクトル）で打ち出す。その後の質点の運動において、時刻 t における原点 O のまわりの角運動量$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$として正しいものを以下より選べ。

(1) $\vec{L} = (maV, 0, 0)$ (2) $\vec{L} = (0, maV, 0)$ (3) $\vec{L} = (0, 0, maV)$
(4) $\vec{L} = (maV + mV^2 t, 0, 0)$ (5) $\vec{L} = (0, maV + mV^2 t, 0)$
(6) $\vec{L} = (0, 0,\ maV + mV^2 t)$

問 3. 図 2 に示すように長さ $2L$、質量 M の一様な細い棒が、直交座標系 xyz の y 軸上にあるとき、この棒の中点を通る z 軸まわりの慣性モーメントとして正しいものを以下より選べ。

(1) $\frac{1}{2}ML^2$ (2) $\frac{1}{3}ML^2$ (3) $\frac{1}{6}ML^2$ (4) ML^2 (5) $4ML^2$

（次頁につづく）

問 4. 問 3 の棒が z 軸を固定軸として角速度ωで回転するとき、棒の運動エネルギーとして正しいものを以下より選べ。

(1) $2ML^2\omega^2$ (2) $\frac{1}{2}ML^2\omega^2$ (3) $\frac{1}{4}ML^2\omega^2$ (4) $\frac{1}{6}ML^2\omega^2$ (5) $\frac{1}{12}ML^2\omega^2$

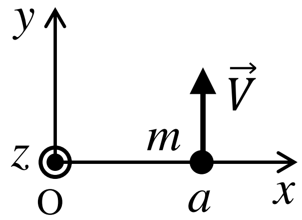


図 1

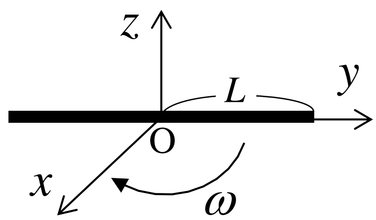
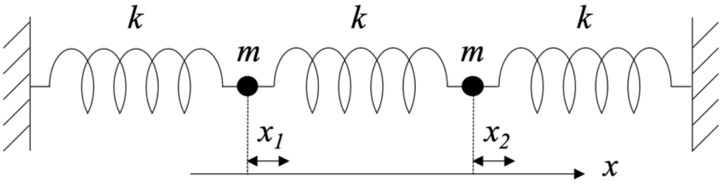


図 2

[B]

下図のように 3 本のバネ（バネ定数 k ）と 2 個の質点（質量 m ）を直線状につないで、自然長になるように両端を固定した。2 つの質点は、それぞれつりあいの位置から、バネの方向 x にのみ微小振動できるものとする。両質点が振動する時のつりあいの位置からの変位をそれぞれ x_1, x_2 とし、バネの質量は無視する。xの 1 階時間微分を$\dot{x}$とし、2 階時間微分を$\ddot{x}$とする。解答は全て、（１）～（５）の選択肢から選べ。



問１．この系のラグランジアン L はどのように書けるか。

（１）$L = \frac{1}{2}m({\dot{x}_1}^2 + {\dot{x}_2}^2) + k({x_1}^2 - x_1x_2 + {x_2}^2)$
（２）$L = \frac{1}{2}m({\dot{x}_1}^2 + {\dot{x}_2}^2) - k({x_1}^2 - x_1x_2 + {x_2}^2)$
（３）$L = -\frac{1}{2}m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + k({x_1}^2 - x_1x_2 + {x_2}^2)$
（４）$L = \frac{1}{2}m({\dot{x}_1}^2 + {\dot{x}_2}^2) - k(x_1 - x_2)^2$
（５）$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 - k({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2)$

問２．オイラー・ラグランジュ方程式から、2 つの質点の運動方程式を書き下すと、それぞれどのようになるか。

（１）$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1)$, $m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2)$
（２）$m\ddot{x}_1 = 2k(x_1 - x_2)$, $m\ddot{x}_2 = k(x_2 - x_1)$
（３）$m\ddot{x}_1 = k(x_1 - x_2)$, $m\ddot{x}_2 = 2k(x_2 - x_1)$
（４）$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - 2x_1)$, $m\ddot{x}_2 = k(x_1 - 2x_2)$
（５）$m\ddot{x}_1 = k(x_1 - 2x_2)$, $m\ddot{x}_2 = k(x_2 - 2x_1)$

問３．2 つの質点の相対運動の運動エネルギーはどのようになるか。

（１）$\frac{m}{4}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$　（２）$\frac{m}{4}(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$　（３）$\frac{m}{4}(\dot{x}_2 - 2\dot{x}_1)^2$
（４）$\frac{m}{4}(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2})^2$　（５）$\frac{m}{2}(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2})^2$

（次頁につづく）

問４．バネの全ポテンシャルエネルギーを、2 つの質点の重心座標 x_g と相対座標 x_r を用いて書くとどのようになるか、x_g と x_r を用いて書け。

（１）$\frac{3}{2}k{x_g}^2+\frac{1}{4}k{x_r}^2$　（２）$k{x_g}^2+\frac{3}{4}k{x_r}^2$　（３）$2k{x_g}^2+\frac{3}{4}k{x_r}^2$
（４）$\frac{5}{2}k{x_g}^2+\frac{5}{4}k{x_r}^2$　（５）$k{x_g}^2+\frac{1}{4}k{x_r}^2$

問５．2 つの質点の連成振動を考えるとき、2 つの規準振動の角振動数 ω_1, ω_2（$\omega_1 < \omega_2$）と、右側の質点の運動方向の組み合わせとして正しいものはどれか。運動方向は、左側の質点が右方向へ動く時を考えよ。

（１）$\omega_1=\sqrt{k/m}$ で左方向,　$\omega_2=\sqrt{3k/m}$ で右方向
（２）$\omega_1=\sqrt{k/m}$ で右方向,　$\omega_2=\sqrt{2k/m}$ で左方向
（３）$\omega_1=\sqrt{k/m}$ で右方向,　$\omega_2=\sqrt{3k/m}$ で左方向
（４）$\omega_1=\sqrt{2k/m}$ で左方向,　$\omega_2=\sqrt{5k/m}$ で右方向
（５）$\omega_1=\sqrt{3k/m}$ で右方向,　$\omega_2=\sqrt{5k/m}$ で左方向

上図中の 2 つの質点の間にあるバネ 1 本だけを、バネ定数 c（$c=k/10$）のバネに交換し、片方の質点のみ微小変位させて静かに放すと、短周期の振動に加えて長周期のうなり振動が起きた。これに関して以下の問いに答えよ。

問６．2 つの質点の連成振動を考える。2 つの規準振動の角振動数 ω_1', ω_2'（$\omega_1' < \omega_2'$）とするとき、ω_2'/ω_1' はどのようになるか。

（１）$\sqrt{11/10}$　（２）$\sqrt{11/9}$　（３）$\sqrt{12/11}$
（４）$\sqrt{5/4}$　（５）$\sqrt{6/5}$

問７．2 つの質点に生じるうなり振動の位相の差はいくらになるか、また短周期の振動とうなり振動の振動数の比はどのようになるか、その組み合わせとして最も適当なものを選べ。

（１）位相差は 0 で約 5 倍　（２）位相差は $\frac{\pi}{2}$ で約 5 倍
（３）位相差は 0 で約 10 倍　（４）位相差は $\frac{\pi}{2}$ で約 10 倍
（５）位相差は $\frac{\pi}{2}$ で約 20 倍

II.

[A]

Q1. When the potential energy in an *xyz* orthogonal coordinate space is given by $U = \frac{1}{2}\alpha(x^2 + y^2)$ (α is a positive constant), what is the force $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ associated with the potential that acts on a point mass at (*x, y, z*)? Choose the correct answer from the list below.

(1) $\vec{F} = \left(\frac{1}{6}\alpha x^3,\ \frac{1}{6}\alpha y^3, 0\right)$ (2) $\vec{F} = \left(-\frac{1}{6}\alpha x^3,\ -\frac{1}{6}\alpha y^3, 0\right)$ (3) $\vec{F} = (\alpha x,\ \alpha y, 0)$
(4) $\vec{F} = \left(\alpha x + \alpha y, \alpha x + \alpha y, 0\right)$ (5) $\vec{F} = (-\alpha x, -\alpha y, 0)$

Q2. In the same potential as in Q1, a point mass of mass m is placed at (*x, y, z*) = (a, 0, 0) (a is a positive constant) and is launched along the y-axis at time *t*=0 with initial velocity $\vec{V} = V\vec{e}_y$ (V is a positive constant, $\vec{e}_y$ is the unit vector along the *y*-axis) as shown in Figure 1. Consider the subsequent motion of the point mass. What is the angular momentum $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ at time *t* about the origin O? Choose the correct answer from the list below.

(1) $\vec{L} = (maV, 0, 0)$ (2) $\vec{L} = (0, maV, 0)$ (3) $\vec{L} = (0, 0, maV)$
(4) $\vec{L} = (maV + mV^2t, 0, 0)$ (5) $\vec{L} = (0, maV + mV^2t, 0)$
(6) $\vec{L} = (0, 0,\ maV + mV^2t)$

Q3. As shown in Figure 2, a thin uniform bar of length 2*L* and mass *M* is located on the y-axis of an *xyz* orthogonal coordinate system. What is the moment of inertia of the bar about the *z*-axis passing through the center of the bar? Choose the correct answer from the list below.

(1) $\frac{1}{2}ML^2$ (2) $\frac{1}{3}ML^2$ (3) $\frac{1}{6}ML^2$ (4) ML^2 (5) $4ML^2$

(Continued on the next page)

Q4. When the bar in Q3 rotates with angular velocity ω about the z-axis, where the z-axis is fixed, what is the kinetic energy of the bar? Choose the correct answer from the list below.

(1) $2ML^2\omega^2$ (2) $\frac{1}{2}ML^2\omega^2$ (3) $\frac{1}{4}ML^2\omega^2$ (4) $\frac{1}{6}ML^2\omega^2$ (5) $\frac{1}{12}ML^2\omega^2$

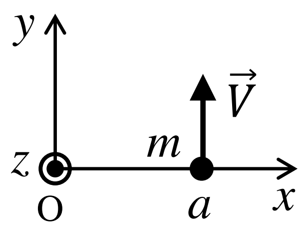


Figure 1

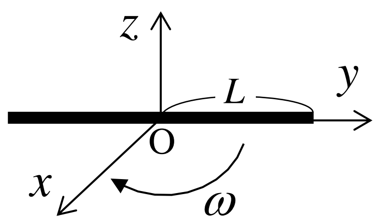
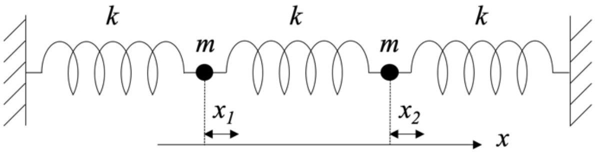


Figure 2

[B]

Three springs each with spring constant k and two point masses each with mass m are connected along the x direction at the natural lengths of all springs, and both ends are fixed as shown in the figure below. The two point masses can move only along the x direction about their equilibrium positions. Displacements from the equilibrium positions are denoted by x_1, x_2 for the two point masses, respectively. All springs are assumed to be massless. Let $\dot{x}$ and $\ddot{x}$ denote the first- and second-order time derivatives of x. Choose the correct answer from （1）～（5）for each of the following questions.



Q1. Which of the following is the Lagrangian L of this system?

（1）$L = \frac{1}{2}m({\dot{x}_1}^2 + {\dot{x}_2}^2) + k({x_1}^2 - x_1x_2 + {x_2}^2)$
（2）$L = \frac{1}{2}m({\dot{x}_1}^2 + {\dot{x}_2}^2) - k({x_1}^2 - x_1x_2 + {x_2}^2)$
（3）$L = -\frac{1}{2}m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + k({x_1}^2 - x_1x_2 + {x_2}^2)$
（4）$L = \frac{1}{2}m({\dot{x}_1}^2 + {\dot{x}_2}^2) - k(x_1 - x_2)^2$
（5）$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 - k({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2)$

Q2. Which of the following is the correct combination of equations of motion for the two point masses, as obtained from the Euler-Lagrange equation?

（1）$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1)$, $m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2)$
（2）$m\ddot{x}_1 = 2k(x_1 - x_2)$, $m\ddot{x}_2 = k(x_2 - x_1)$
（3）$m\ddot{x}_1 = k(x_1 - x_2)$, $m\ddot{x}_2 = 2k(x_2 - x_1)$
（4）$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - 2x_1)$, $m\ddot{x}_2 = k(x_1 - 2x_2)$
（5）$m\ddot{x}_1 = k(x_1 - 2x_2)$, $m\ddot{x}_2 = k(x_2 - 2x_1)$

Q3. Which of the following is the kinetic energy associated with the relative motion of the two point masses?

（1）$\frac{m}{4}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$　（2）$\frac{m}{4}(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$　（3）$\frac{m}{4}(\dot{x}_2 - 2\dot{x}_1)^2$
（4）$\frac{m}{4}(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2})^2$　（5）$\frac{m}{2}(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{2})^2$

(Continued on the next page)

Q4. Write down the total potential energy of the springs in terms of the center of mass coordinate x_g of the two point masses and the relative coordinate x_r between the two point masses.

（1） $\frac{3}{2}k{x_g}^2+\frac{1}{4}k{x_r}^2$ （2） $k{x_g}^2+\frac{3}{4}k{x_r}^2$ （3） $2k{x_g}^2+\frac{3}{4}k{x_r}^2$
（4） $\frac{5}{2}k{x_g}^2+\frac{5}{4}k{x_r}^2$ （5） $k{x_g}^2+\frac{1}{4}k{x_r}^2$

Q5. Consider the coupled oscillation of the two point masses. Which of the below is the correct combination of angular frequencies ω_1 , ω_2 （$\omega_1 < \omega_2$） of the two normal modes and the corresponding direction of motion of the right point mass, when the left point mass moves to the right?

（1） $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ and to the left, $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$ and to the right
（2） $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ and to the right, $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ and to the left
（3） $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ and to the right, $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$ and to the left
（4） $\omega_1 = \sqrt{2k/m}$ and to the left, $\omega_2 = \sqrt{5k/m}$ and to the right
（5） $\omega_1 = \sqrt{3k/m}$ and to the right, $\omega_2 = \sqrt{5k/m}$ and to the left

The middle spring between the two point masses is replaced by a spring with spring constant c （$c = k/10$ ） and one of the two point masses is then slightly displaced and released. In addition to fast oscillations, a slow beat oscillation occurs. Answer the following questions.

Q6. Consider the coupled oscillation of these two point masses. What is the value of the ratio ω_2'/ω_1', where ω_1' and ω_2' （$\omega_1' < \omega_2'$） are the angular frequencies of the two normal modes?

（1） $\sqrt{11/10}$ （2） $\sqrt{11/9}$ （3） $\sqrt{12/11}$
（4） $\sqrt{5/4}$ （5） $\sqrt{6/5}$

Q7. Which of the following is the combination with the most accurate values of the phase difference of the beat oscillations of the two point masses, and the ratio of the frequency of the fast oscillation to that of the slow beat oscillation?

（1） difference 0, about 5 （2） difference $\frac{\pi}{2}$, about 5 （3） difference 0, about 10
（4） difference $\frac{\pi}{2}$, about 10 （5） difference $\frac{\pi}{2}$, about 20

Ⅲ

［A］

問１．演算子の交換関係に関して、以下の空欄に当てはまるものをそれぞれ選択肢から選びなさい。

運動量演算子 $\hat{p}_x = -i\hbar\partial/\partial x$ と位置演算子 $\hat{x} = x$ の交換関係は、 $[\hat{p}_x, \hat{x}]$ ＝ $\boxed{①}$ となる。また、角運動量の z 成分を $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ とすると、$\hat{p}_x$ と $\hat{L}_z$ の交換関係は、 $[\hat{p}_x, \hat{L}_z]$ ＝ $\boxed{②}$ となる。

(A) 0　(B) $i\hbar$　(C) $-i\hbar$　(D) $i\hbar\hat{x}$　(E) $-i\hbar\hat{x}$　(F) $i\hbar\hat{y}$　(G) $-i\hbar\hat{y}$　(H) $i\hbar\hat{p}_x$　(I) $-i\hbar\hat{p}_x$　(J) $i\hbar\hat{p}_y$　(K) $-i\hbar\hat{p}_y$

問２．エルミート行列の性質について、以下の文章の空欄に当てはまるものをそれぞれ選択肢から選びなさい。

（あ）エルミート行列は、$\boxed{③}$ を用いて対角化可能である。

（い）エルミート行列の固有値は、$\boxed{④}$ 。

（う）エルミート行列の異なる固有値に対する固有ベクトルは、$\boxed{⑤}$ 。

(A) 零行列　(B) 単位行列　(C) 対称行列　(D) ユニタリー行列　(E) エルミート行列　(F) 直交する　(G) 直交しない　(H) 平行になる　(I) 実数となる　(J) 虚数となる　(K) ゼロとなる

（次頁につづく）

[B]

z 軸方向に一様な静磁場中に電子が静止している。この時、電子のハミルトニアンは、

$$\hat{H} = -\mu \vec{S} \cdot \vec{B}, \qquad \vec{B} = (0, 0, B)$$

のように与えられる。ここで、スピン演算子は、

$$\vec{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z), \quad \hat{S}_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

で与えられ、$\hat{S}_z$の固有ベクトルを $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表すとする。また、μ は定数である。この時、問１～問４について、空欄に当てはまるものをそれぞれの選択肢から選びなさい。

問１．ハミルトニアン $\hat{H}$ に対して、$\hat{H}|\uparrow\rangle =$ ⑥ $|\uparrow\rangle$ と $\hat{H}|\downarrow\rangle =$ ⑦ $|\downarrow\rangle$ が成り立つ。

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}\hbar$ (C) $-\frac{1}{2}\hbar$ (D) $\frac{i}{2}\hbar$ (E) $-\frac{i}{2}\hbar$ (F) $\frac{1}{2}\hbar\mu B$ (G) $-\frac{1}{2}\hbar\mu B$ (H) $\frac{i}{2}\hbar\mu B$ (I) $-\frac{i}{2}\hbar\mu B$

問２．$\hat{S}_x$ の固有値 $+\frac{1}{2}\hbar$ に対応する固有ベクトルは、$|x;+\rangle =$ ⑧ となり、固有値 $-\frac{1}{2}\hbar$ に対応する固有ベクトルは、$|x;-\rangle =$ ⑨ となる。

(A) 0 (B) $|\uparrow\rangle$ (C) $|\downarrow\rangle$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ (E) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ (F) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$
(G) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$

問３．時刻 $t = 0$ で状態が $|\psi(0)\rangle = |x;+\rangle$ のとき、時刻 t における状態は、$|\psi(t)\rangle =$ ⑩ となる。

(A) 0 (B) $\exp\left(\frac{i}{2}\mu B t\right)|\uparrow\rangle$ (C) $\exp\left(-\frac{i}{2}\mu B t\right)|\uparrow\rangle$ (D) $\exp\left(\frac{i}{2}\mu B t\right)|\downarrow\rangle$
(E) $\exp\left(-\frac{i}{2}\mu B t\right)|\downarrow\rangle$ (F) $\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{i}{2}\mu B t\right)|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{i}{2}\mu B t\right)|\downarrow\rangle$
(G) $\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{i}{2}\mu B t\right)|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{i}{2}\mu B t\right)|\downarrow\rangle$
(H) $\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{i}{2}\mu B t\right)|\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{i}{2}\mu B t\right)|\downarrow\rangle$

（次頁につづく）

問４．時刻 $t=0$ でスピン状態が $|\psi(0)\rangle = |x;+\rangle$ のとき、時刻 t における $\hat{S}_x$ と $\hat{S}_z$ の期待値はそれぞれ $\langle S_x\rangle = \langle\psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle =$ ⑪、$\langle S_z\rangle = \langle\psi(t)|\hat{S}_z|\psi(t)\rangle =$ ⑫ となる。また、$|\langle x;-|\psi(t)\rangle| = 1$ となる最初の時刻 $t=T$ は、$T =$ ⑬ となる。したがって、スピンは時間 T ごとに反転することがわかる。

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}\hbar$ (C) $-\frac{1}{2}\hbar$ (D) $\frac{1}{2}\hbar\sin(\mu Bt)$ (E) $-\frac{1}{2}\hbar\sin(\mu Bt)$ (F) $\frac{1}{2}\hbar\cos(\mu Bt)$
(G) $-\frac{1}{2}\hbar\cos(\mu Bt)$ (H) $\frac{1}{2}\hbar\sin(\mu Bt)+\frac{1}{2}\hbar\cos(\mu Bt)$
(I) $\frac{1}{2}\hbar\sin(\mu Bt)-\frac{1}{2}\hbar\cos(\mu Bt)$ (J) $\frac{\pi}{2\mu B}$ (K) $\frac{\pi}{\mu B}$ (L) $\frac{2\pi}{\mu B}$

次に、z 軸方向の静磁場に加えて、xy 平面内を角速度 $\omega = -\mu B$ で回転する大きさ B の磁場を同時に印加する。この時、磁束密度は、$\vec{B} = (B\cos\omega t,\ B\sin\omega t,\ B)$となる。この時、問５～問７について、空欄に当てはまるものをそれぞれの選択肢から選びなさい。必要なら以下の公式、

$$e^{\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_z}\hat{S}_x e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_z} = \hat{S}_x\cos\theta - \hat{S}_y\sin\theta, \qquad e^{\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_z}\hat{S}_y e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_z} = \hat{S}_y\cos\theta + \hat{S}_x\sin\theta$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_x}\hat{S}_z e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_x} = \hat{S}_z\cos\theta + \hat{S}_y\sin\theta$$

を用いよ。

（次頁につづく）

問５．シュレディンガー方程式は、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \qquad \hat{H} = -\mu B\big(\cos(\omega t)\,\hat{S}_x + \sin(\omega t)\,\hat{S}_y + \hat{S}_z\big)$$

となる。ここで、以下のような状態 $|\psi'(t)\rangle$ を考える。

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi'(t)\rangle, \qquad \hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\omega t\hat{S}_z}$$

この時、$|\psi'(t)\rangle$に対するシュレディンガー方程式は、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'(t)\rangle = \hat{H}'|\psi'(t)\rangle, \qquad \hat{H}' = \hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U} - i\hbar\hat{U}^\dagger\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}$$

と書くことができる。この時、$\hat{H}' =$ $\boxed{⑭}$ となる。

(A) 0 (B) $\hat{H}$ (C) $-\mu B\hat{S}_x$ (D) $-\mu B\hat{S}_y$ (E) $-\mu B\hat{S}_z$
(F) $-\mu B\big(\cos(\mu Bt)\,\hat{S}_x - \sin(\mu Bt)\,\hat{S}_y\big)$ (G) $\exp\big(-i\mu Bt\hat{S}_z\big)$
(H) $\exp\Big(-i\mu Bt\big(\hat{S}_x + \hat{S}_y\big)\Big)$

問６．時刻 $t = 0$ で状態が $|\psi(0)\rangle = |\psi'(0)\rangle = |\uparrow\rangle$ のとき、問４を参考にすると、時刻 $t = T$ において、$|\psi'(T)\rangle =$ $\boxed{⑮}$ となる。

(A) 0 (B) $i|\uparrow\rangle$ (C) $i|\downarrow\rangle$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ (E) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ (F) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$
(G) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$

問７．時刻 $t = 0$ で状態が $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$ であるとする。この時、$t = T$ における $\hat{S}_z$ の期待値は、$\langle\hat{S}_z\rangle = \langle\psi(T)|\hat{S}_z|\psi(T)\rangle =$ $\boxed{⑯}$ となる。

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}\hbar$ (C) $-\frac{1}{2}\hbar$ (D) $\hbar$ (E) $-\hbar$ (F) $\frac{i}{2}\hbar$ (G) $-\frac{i}{2}\hbar$ (H) $i\hbar$ (I) $-i\hbar$

III

[A]

Q1. Choose the correct expressions from the options below to fill in the blanks in the following sentence about commutation relations of operators.

The commutator of the momentum operator $\hat{p}_x = -i\hbar\partial/\partial x$ and the coordinate operator $\hat{x} = x$ is $[\hat{p}_x, \hat{x}]$ = $\boxed{①}$. The commutator of $\hat{p}_x$ and the z component of the angular momentum operator $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ is $[\hat{p}_x, \hat{L}_z]$ = $\boxed{②}$.

(A) 0 (B) $i\hbar$ (C) $-i\hbar$ (D) $i\hbar\hat{x}$ (E) $-i\hbar\hat{x}$ (F) $i\hbar\hat{y}$ (G) $-i\hbar\hat{y}$ (H) $i\hbar\hat{p}_x$ (I) $-i\hbar\hat{p}_x$ (J) $i\hbar\hat{p}_y$ (K) $-i\hbar\hat{p}_y$

Q2. Choose the correct terms from the options below to fill in the blanks in the following three sentences about the properties of a Hermitian matrix.

I. Any Hermitian matrix is diagonalizable by a $\boxed{③}$.

II. All eigenvalues of a Hermitian matrix are $\boxed{④}$.

III. The eigenvectors corresponding to two distinct eigenvalues of a Hermitian matrix are $\boxed{⑤}$.

(A) zero matrix (B) unit matrix (C) symmetric matrix (D) unitary matrix (E) Hermitian matrix (F) orthogonal (G) non-orthogonal (H) parallel (I) real (J) imaginary (K) zero

(Continued on the next page)

[B]

Consider an electron in a uniform magnetic field in the z-direction. The Hamiltonian is given by

$$\hat{H} = -\mu \vec{S} \cdot \vec{B}, \qquad \vec{B} = (0, 0, B).$$

The spin operator $\vec{S}$ is given by

$$\vec{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z), \quad \hat{S}_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \hbar \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

where the eigenvectors of $\hat{S}_z$ are $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Fill in the blanks in questions **Q1** to **Q4** with the correct expressions from the options below each question.

Q1. For the Hamiltonian $\hat{H}$, the following relations are satisfied.

$$\hat{H}|\uparrow\rangle = \boxed{⑥}\,|\uparrow\rangle \text{ and } \hat{H}|\downarrow\rangle = \boxed{⑦}\,|\downarrow\rangle.$$

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}\hbar$ (C) $-\frac{1}{2}\hbar$ (D) $\frac{i}{2}\hbar$ (E) $-\frac{i}{2}\hbar$ (F) $\frac{1}{2}\hbar\mu B$ (G) $-\frac{1}{2}\hbar\mu B$ (H) $\frac{i}{2}\hbar\mu B$ (I) $-\frac{i}{2}\hbar\mu B$

Q2. The eigenvector of $\hat{S}_x$ with the eigenvalue $+\frac{1}{2}\hbar$ is $|x;+\rangle = \boxed{⑧}$ and that with the eigenvalue $-\frac{1}{2}\hbar$ is $|x;-\rangle = \boxed{⑨}$.

(A) 0 (B) $|\uparrow\rangle$ (C) $|\downarrow\rangle$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ (E) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ (F) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$
(G) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$

Q3. When the state at $t = 0$ is $|\psi(0)\rangle = |x;+\rangle$, the state at time t is given by $|\psi(t)\rangle = \boxed{⑩}$.

(A) 0 (B) $\exp\left(\frac{i}{2}\mu Bt\right)|\uparrow\rangle$ (C) $\exp\left(-\frac{i}{2}\mu Bt\right)|\uparrow\rangle$ (D) $\exp\left(\frac{i}{2}\mu Bt\right)|\downarrow\rangle$
(E) $\exp\left(-\frac{i}{2}\mu Bt\right)|\downarrow\rangle$ (F) $\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{i}{2}\mu Bt\right)|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{i}{2}\mu Bt\right)|\downarrow\rangle$
(G) $\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{i}{2}\mu Bt\right)|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{i}{2}\mu Bt\right)|\downarrow\rangle$
(H) $\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{i}{2}\mu Bt\right)|\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{i}{2}\mu Bt\right)|\downarrow\rangle$

(Continued on the next page)

Q4. When the state at $t = 0$ is $|\psi(0)\rangle = |x;+\rangle$, the expectation values of $\hat{S}_x$ and $\hat{S}_z$ at time t are given by $\langle S_x\rangle = \langle\psi(t)|\hat{S}_x|\psi(t)\rangle =$ ⑪ and $\langle S_z\rangle = \langle\psi(t)|\hat{S}_z|\psi(t)\rangle =$ ⑫, respectively. The first time that $|\langle x;-|\psi(t)\rangle| = 1$ is at $t = T =$ ⑬. This means that the spin flips at intervals of T.

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}\hbar$ (C) $-\frac{1}{2}\hbar$ (D) $\frac{1}{2}\hbar\sin(\mu Bt)$ (E) $-\frac{1}{2}\hbar\sin(\mu Bt)$ (F) $\frac{1}{2}\hbar\cos(\mu Bt)$
(G) $-\frac{1}{2}\hbar\cos(\mu Bt)$ (H) $\frac{1}{2}\hbar\sin(\mu Bt) + \frac{1}{2}\hbar\cos(\mu Bt)$
(I) $\frac{1}{2}\hbar\sin(\mu Bt) - \frac{1}{2}\hbar\cos(\mu Bt)$ (J) $\frac{\pi}{2\mu B}$ (K) $\frac{\pi}{\mu B}$ (L) $\frac{2\pi}{\mu B}$

Next, in addition to the magnetic field in the *z*-direction, a magnetic field of strength B is applied that is rotating in the *xy* plane with angular velocity $\omega = -\mu B$. The total magnetic field is, therefore, $\vec{B} = (B\cos\omega t,\ B\sin\omega t,\ B)$. Fill in the blanks in questions Q5 to Q7 with the correct expressions from the options below each question. If necessary, the following formulae can be used.

$$e^{\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_z}\hat{S}_x e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_z} = \hat{S}_x\cos\theta - \hat{S}_y\sin\theta\,, \qquad e^{\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_z}\hat{S}_y e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_z} = \hat{S}_y\cos\theta + \hat{S}_x\sin\theta$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_x}\hat{S}_z e^{-\frac{i}{\hbar}\theta\hat{S}_x} = \hat{S}_z\cos\theta + \hat{S}_y\sin\theta$$

(Continued on the next page)

Q5. The Schrödinger equation for the system is

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \qquad \hat{H} = -\mu B\left(\cos(\omega t)\,\hat{S}_x + \sin(\omega t)\,\hat{S}_y + \hat{S}_z\right).$$

Consider the state $|\psi'(t)\rangle$, where

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi'(t)\rangle, \qquad \hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\omega t\hat{S}_z}.$$

The Schrödinger equation for $|\psi'(t)\rangle$ is

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'(t)\rangle = \hat{H}'|\psi'(t)\rangle,\ \hat{H}' = \hat{U}^{\dagger}\hat{H}\hat{U} - i\hbar\hat{U}^{\dagger}\frac{\partial\hat{U}}{\partial t},$$

where $\hat{H}' = \boxed{⑭}$.

(A) 0 (B) $\hat{H}$ (C) $-\mu B\hat{S}_x$ (D) $-\mu B\hat{S}_y$ (E) $-\mu B\hat{S}_z$
(F) $-\mu B\left(\cos(\mu Bt)\,\hat{S}_x - \sin(\mu Bt)\,\hat{S}_y\right)$ (G) $\exp\left(-i\mu Bt\hat{S}_z\right)$
(H) $\exp\left(-i\mu Bt\left(\hat{S}_x + \hat{S}_y\right)\right)$

Q6. When the state at time $t = 0$ is $|\psi(0)\rangle = |\psi'(0)\rangle = |\uparrow\rangle$, the state at time $t = T$, by referring to Q4, is $|\psi'(T)\rangle = \boxed{⑮}$.

(A) 0 (B) $i|\uparrow\rangle$ (C) $i|\downarrow\rangle$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ (E) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$ (F) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$
(G) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$

Q7. When the state at time $t = 0$ is $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$, the expectation value of $\hat{S}_z$ at $t = T$ is $\langle\hat{S}_z\rangle = \langle\psi(T)|\hat{S}_z|\psi(T)\rangle = \boxed{⑯}$.

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}\hbar$ (C) $-\frac{1}{2}\hbar$ (D) $\hbar$ (E) $-\hbar$ (F) $\frac{i}{2}\hbar$ (G) $-\frac{i}{2}\hbar$ (H) $i\hbar$ (I) $-i\hbar$

IV

[A]

図 1 のように $+z$ 軸方向を向いた磁束密度 $\overrightarrow{B}$ の一様な磁場の中に半径 a の円形のコイルがある。コイルは，その中心を通り z 軸に垂直な x 軸を回転軸として，角速度 ω で回転している。時刻 $t=0$ でコイルの面と磁場 $\overrightarrow{B}$ の向きは直交するとし，コイルの電気抵抗を R とする。以下の問いの答えを，それぞれの解答群のうちから一つずつ選べ。ただし，コイル内の誘導電流のつくる磁場の効果およびコイルにつながるリード線の影響は無視できるものとする。

問 1. コイルに発生する起電力を求めよ。ただし，$t=0$ の直後に発生する起電力を正とする。$\boxed{1}$

$\boxed{1}$

(1) $B\pi a^2 \cos\omega t$　(2) $B\pi a^2 \sin\omega t$　(3) $\omega B\pi a^2 \cos\omega t$

(4) $\omega B\pi a^2 \sin\omega t$　(5) $\omega^2 B\pi a^2 \cos\omega t$　(6) $\omega^2 B\pi a^2 \sin\omega t$

問 2. コイルが時刻 $t=0$ から半回転する間にコイルを流れる総電気量を求めよ。$\boxed{2}$

$\boxed{2}$

(1) $\dfrac{B\pi a^2}{R\omega}$　(2) $\dfrac{2B\pi a^2}{R\omega}$　(3) $\dfrac{B\pi a^2}{R}$　(4) $\dfrac{2B\pi a^2}{R}$　(5) $\dfrac{\omega B\pi a^2}{R}$　(6) $\dfrac{2\omega B\pi a^2}{R}$

問 3. 円形コイルの半径を $a=2$ cm，回転数を 1 kHz，磁束密度の大きさを $B=0.5$ T，コイルの抵抗を $R=10\ \Omega$ としたとき，コイルに発生する起電力の実効値 $\boxed{3}$ [V] およびコイル内に発生する電流の強さの最大値 $\boxed{4}$ [A] を有効数字 1 桁で求めよ。$\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{3}$

(1) 10　(2) 4　(3) 3　(4) 1　(5) 0.4　(6) 0.3

$\boxed{4}$

(1) 0.04　(2) 0.2　(3) 0.06　(4) 0.4　(5) 2　(6) 0.6

（次頁につづく）

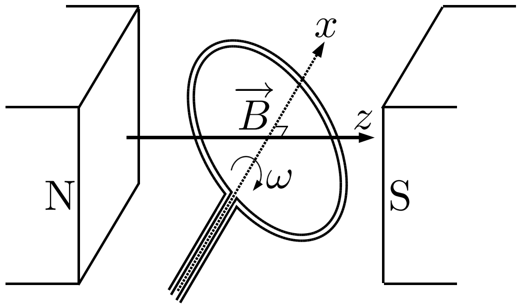


図 1

[B]

問題 [A] の図 1 の回路において，円形コイルの回転を続けさせるために外から加えなければならないトルクのなす仕事率を以下の設問に従って導け。各問の答えを，それぞれの解答群のうちから一つずつ選べ。ただし，y 軸は図 1 において x 軸と z 軸に直交し，各軸は右手系をとるものとする。また，コイル内の誘導電流のつくる磁場の効果およびコイルにつながるリード線の影響は無視できるものとする。

問 1. 図 2(a) のように $\pm m$ の仮想的な磁荷を，z 軸に沿って $z = \pm\dfrac{s}{2}$ の位置におくことによりつくられる大きさ M の磁気双極子が，z 軸上の点 A（$z = z_0$）につくる磁場の磁束密度を，$z_0 \gg s$ として求めよ。ただし，原点にある仮想的な磁荷 m が距離 r の位置につくる磁束密度 B は，透磁率を μ として，$B = \dfrac{\mu m}{4\pi r^2}$ で与えられる。$\boxed{5}$

$\boxed{5}$

(1) $\dfrac{\mu M}{\pi z_0^2}$　(2) $\dfrac{\mu M}{2\pi z_0^2}$　(3) $\dfrac{\mu M}{4\pi z_0^2}$　(4) $\dfrac{\mu M}{\pi z_0^3}$　(5) $\dfrac{\mu M}{2\pi z_0^3}$　(6) $\dfrac{\mu M}{4\pi z_0^3}$

問 2. 図 2(b) のように $z = 0$ に中心をもつ半径 a の円形電流 I が，その中心軸である z 軸上の点 A（$z = z_0$）につくる磁場の磁束密度を，$z_0 \gg a$ として求めよ。透磁率を μ とする。$\boxed{6}$

$\boxed{6}$

(1) $\dfrac{\mu I a^2}{z_0^2}$　(2) $\dfrac{\mu I a^2}{2z_0^2}$　(3) $\dfrac{\mu I a^2}{4z_0^2}$　(4) $\dfrac{\mu I a^2}{z_0^3}$　(5) $\dfrac{\mu I a^2}{2z_0^3}$　(6) $\dfrac{\mu I a^2}{4z_0^3}$

問 3. 図 1 の円形コイルを磁気双極子 $\overrightarrow{M}$ とみなして，磁束密度 $\overrightarrow{B}$ の一様な磁場の中にあるこのコイルが受けるトルクの大きさ $\boxed{7}$ および向き $\boxed{8}$ を求めよ。$\boxed{7}$ $\boxed{8}$

（次頁につづく）

$\boxed{7}$

(1) $\dfrac{(B\pi a^2 \sin\omega t)^2}{R}$　(2) $\dfrac{\left(\omega^{1/2} B\pi a^2 \sin\omega t\right)^2}{R}$　(3) $\dfrac{(\omega B\pi a^2 \sin\omega t)^2}{R}$

(4) $\dfrac{(B\pi a^2 \cos\omega t)^2}{R}$　(5) $\dfrac{\left(\omega^{1/2} B\pi a^2 \cos\omega t\right)^2}{R}$　(6) $\dfrac{(\omega B\pi a^2 \cos\omega t)^2}{R}$

$\boxed{8}$

(1) x 軸の正の向き　(2) x 軸の負の向き　(3) y 軸の正の向き
(4) y 軸の負の向き　(5) z 軸の正の向き　(6) z 軸の負の向き

問 4. 図 1 の円形コイルを角速度 ω で回転を続けさせるために，トルクのなす仕事率を求めよ。$\boxed{9}$

$\boxed{9}$

(1) $\dfrac{(B\pi a^2 \sin\omega t)^2}{R}$　(2) $\dfrac{\left(\omega^{1/2} B\pi a^2 \sin\omega t\right)^2}{R}$　(3) $\dfrac{(\omega B\pi a^2 \sin\omega t)^2}{R}$

(4) $\dfrac{(B\pi a^2 \cos\omega t)^2}{R}$　(5) $\dfrac{\left(\omega^{1/2} B\pi a^2 \cos\omega t\right)^2}{R}$　(6) $\dfrac{(\omega B\pi a^2 \cos\omega t)^2}{R}$

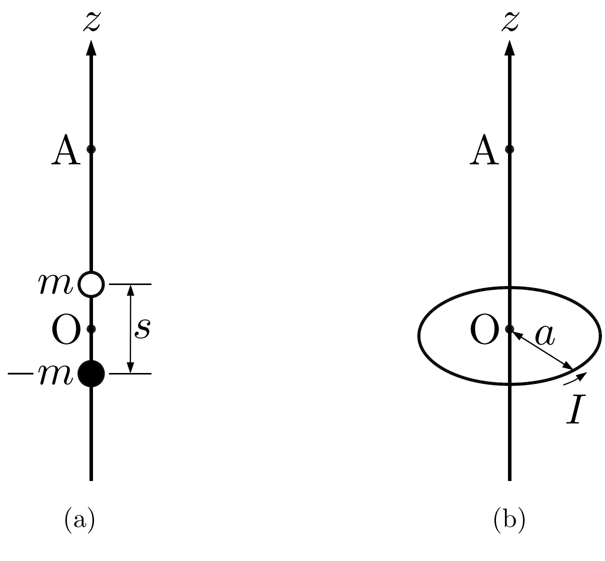


図 2

以下では，問題 [A] の図 1 の回路において，円形コイルの自己インダクタンスを L として，コイル内に発生した電流のつくる磁場の効果も考慮して答えよ。

（次頁につづく）

問 5. 円形コイル内に発生する電流の強さの最大値を求めよ。$\boxed{10}$

$\boxed{10}$

(1) $\dfrac{B\pi a^2}{(\omega^2 L^2 + R^2)^{1/2}}$　(2) $\dfrac{\omega B\pi a^2}{(\omega^2 L^2 + R^2)^{1/2}}$　(3) $\dfrac{\omega^2 B\pi a^2}{(\omega^2 L^2 + R^2)^{1/2}}$

(4) $\dfrac{B\pi a^2}{\omega^2 L^2 + R^2}$　(5) $\dfrac{\omega B\pi a^2}{\omega^2 L^2 + R^2}$　(6) $\dfrac{\omega^2 B\pi a^2}{\omega^2 L^2 + R^2}$

問 6. 円形コイルの半径を $a = 2$ cm，回転数を 1 kHz，磁束密度の大きさを $B = 0.5$ T，コイルの抵抗を $R = 10\ \Omega$，コイルの自己インダクタンスを $L = 900\ \mu$H としたとき，コイルが時刻 $t = 0$ から回転をはじめて，最初に電流の強さが最大になるまでの時間 [s] を有効数字 1 桁で求めよ。$\boxed{11}$

$\boxed{11}$

(1) 3×10^{-2}　(2) 3×10^{-3}　(3) 3×10^{-4}

(4) 3×10^{-5}　(5) 3×10^{-6}　(6) 3×10^{-7}

IV

[A]

Consider a circular coil with radius a in a uniform magnetic field of magnetic flux density $\overrightarrow{B}$ pointing in the $+z$-axis direction as shown in Figure 1. The coil rotates at an angular velocity ω about the x-axis, which passes through the center of the coil along its diameter and is perpendicular to the z-axis. At time $t = 0$, the direction of the magnetic field $\overrightarrow{B}$ and the plane of the coil are orthogonal, and the electrical resistance of the coil is R. Here, the effect of the magnetic field created by the induced current in the coil and the effect of the lead wire connected to the coil are negligible. For each question, choose the correct answer from each answer group.

Q1. Find the electromotive force generated in the coil. Here, the electromotive force generated immediately after $t = 0$ is positive. $\boxed{1}$

$\boxed{1}$

(1) $B\pi a^2 \cos\omega t$ (2) $B\pi a^2 \sin\omega t$ (3) $\omega B\pi a^2 \cos\omega t$

(4) $\omega B\pi a^2 \sin\omega t$ (5) $\omega^2 B\pi a^2 \cos\omega t$ (6) $\omega^2 B\pi a^2 \sin\omega t$

Q2. Find the total charge flowing through the coil during half a turn from time $t = 0$. $\boxed{2}$

$\boxed{2}$

(1) $\dfrac{B\pi a^2}{R\omega}$ (2) $\dfrac{2B\pi a^2}{R\omega}$ (3) $\dfrac{B\pi a^2}{R}$ (4) $\dfrac{2B\pi a^2}{R}$ (5) $\dfrac{\omega B\pi a^2}{R}$ (6) $\dfrac{2\omega B\pi a^2}{R}$

Q3. For a radius of the circular coil $a = 2$ cm, a rotation speed 1 kHz, a magnetic flux density $B = 0.5$ T, and a coil resistance $R = 10\ \Omega$, calculate the effective electromotive force generated in the coil $\boxed{3}$ [V] and the maximum value of the strength of the current generated in the coil $\boxed{4}$ [A] to one significant digit. $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

$\boxed{3}$

(1) 10 (2) 4 (3) 3 (4) 1 (5) 0.4 (6) 0.3

$\boxed{4}$

(1) 0.04 (2) 0.2 (3) 0.06 (4) 0.4 (5) 2 (6) 0.6

(Continued on the next page)

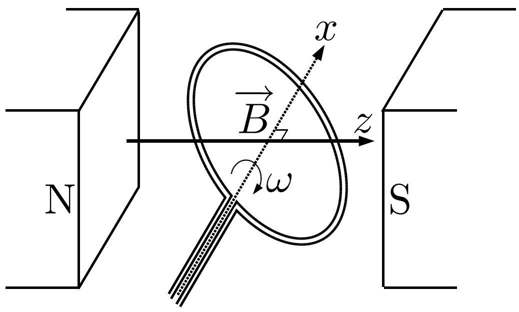


Figure 1

[B]

The following questions Q1 to Q4 lead to the derivation of the work rate of the torque that must be applied from the outside in order to maintain the rotation of the circular coil for the circuit in Figure 1 of Problem [A]. Choose one answer from each answer group. In the following, the y-axis is orthogonal to both the x-axis and the z-axis, and rotations around the axis follow the right-hand rule. Assume that the effect of the magnetic field produced by the induced current in the coil and the effect of the lead wire connected to the coil are negligible.

Q1. Virtual magnetic charges $\pm m$ are placed at positions $z = \pm\frac{s}{2}$ on the z-axis as shown in Figure 2(a). Find the magnetic flux density at point A ($z = z_0$) on the z-axis due to the magnetic dipole with magnitude M formed by these magnetic charges, assuming $z_0 \gg s$. Recall that the magnetic flux density B at distance r created by a virtual magnetic charge m at the origin is given by $B = \frac{\mu m}{4\pi r^2}$, where μ is the permeability. $\boxed{5}$

$\boxed{5}$

(1) $\frac{\mu M}{\pi z_0^2}$ (2) $\frac{\mu M}{2\pi z_0^2}$ (3) $\frac{\mu M}{4\pi z_0^2}$ (4) $\frac{\mu M}{\pi z_0^3}$ (5) $\frac{\mu M}{2\pi z_0^3}$ (6) $\frac{\mu M}{4\pi z_0^3}$

Q2. Refer to Figure 2(b) for this question. Find the magnetic flux density of the magnetic field at point A ($z = z_0$) on the z-axis, created by the circular current I with radius a centered at $z = 0$, assuming $z_0 \gg a$. Let μ be the magnetic permeability. The plane on which the circular current flows is perpendicular to the z-axis. $\boxed{6}$

$\boxed{6}$

(1) $\frac{\mu I a^2}{z_0^2}$ (2) $\frac{\mu I a^2}{2z_0^2}$ (3) $\frac{\mu I a^2}{4z_0^2}$ (4) $\frac{\mu I a^2}{z_0^3}$ (5) $\frac{\mu I a^2}{2z_0^3}$ (6) $\frac{\mu I a^2}{4z_0^3}$

Q3. Treat the circular coil in Figure 1 as a magnetic dipole $\overrightarrow{M}$, and find the magnitude $\boxed{7}$ and direction of the torque that this coil receives in a uniform magnetic field of magnetic flux density $\overrightarrow{B}$ $\boxed{8}$. $\boxed{7}$ $\boxed{8}$

(Continued on the next page)

$\boxed{7}$

(1) $\dfrac{(B\pi a^2 \sin \omega t)^2}{R}$ (2) $\dfrac{\left(\omega^{1/2} B\pi a^2 \sin \omega t\right)^2}{R}$ (3) $\dfrac{(\omega B\pi a^2 \sin \omega t)^2}{R}$

(4) $\dfrac{(B\pi a^2 \cos \omega t)^2}{R}$ (5) $\dfrac{\left(\omega^{1/2} B\pi a^2 \cos \omega t\right)^2}{R}$ (6) $\dfrac{(\omega B\pi a^2 \cos \omega t)^2}{R}$

$\boxed{8}$

(1) positive x-axis (2) negative x-axis (3) positive y-axis
(4) negative y-axis (5) positive z-axis (6) negative z-axis

Q4. Find the power associated with the torque that is required to keep the circular coil in Figure 1 rotating at the angular velocity ω. $\boxed{9}$

$\boxed{9}$

(1) $\dfrac{(B\pi a^2 \sin \omega t)^2}{R}$ (2) $\dfrac{\left(\omega^{1/2} B\pi a^2 \sin \omega t\right)^2}{R}$ (3) $\dfrac{(\omega B\pi a^2 \sin \omega t)^2}{R}$

(4) $\dfrac{(B\pi a^2 \cos \omega t)^2}{R}$ (5) $\dfrac{\left(\omega^{1/2} B\pi a^2 \cos \omega t\right)^2}{R}$ (6) $\dfrac{(\omega B\pi a^2 \cos \omega t)^2}{R}$

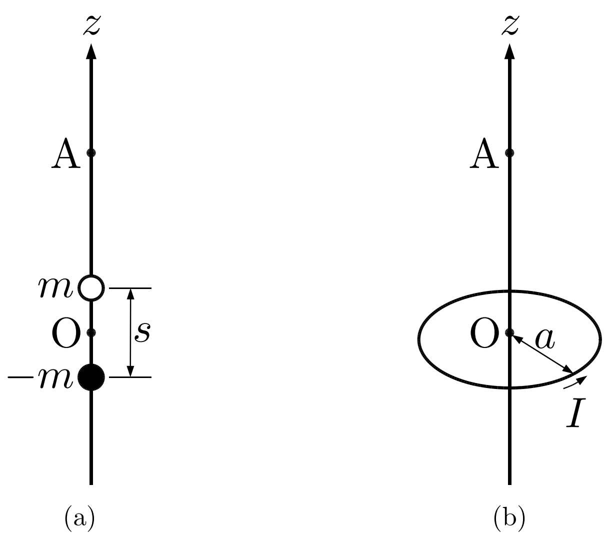


Figure 2

The following questions regard the effect of the magnetic field created by the current generated in the coil in the circuit of Figure 1 of Problem [A]. Let L be the self-inductance of the circular coil.

(Continued on the next page)

Q5. Find the maximum value of the strength of the current generated in the circular coil. $\boxed{10}$

$\boxed{10}$

(1) $\dfrac{B\pi a^2}{(\omega^2 L^2 + R^2)^{1/2}}$ (2) $\dfrac{\omega B\pi a^2}{(\omega^2 L^2 + R^2)^{1/2}}$ (3) $\dfrac{\omega^2 B\pi a^2}{(\omega^2 L^2 + R^2)^{1/2}}$

(4) $\dfrac{B\pi a^2}{\omega^2 L^2 + R^2}$ (5) $\dfrac{\omega B\pi a^2}{\omega^2 L^2 + R^2}$ (6) $\dfrac{\omega^2 B\pi a^2}{\omega^2 L^2 + R^2}$

Q6. For a radius of the circular coil $a = 2$ cm, a rotation speed 1 kHz, a magnetic flux density $B = 0.5$ T, a coil resistance $R = 10\ \Omega$, and a coil self-inductance $L = 900$ μH, find to one significant digit the time [s] until the strength of the current reaches a maximum, if the coil starts rotating from time $t = 0$. $\boxed{11}$

$\boxed{11}$

(1) 3×10^{-2} (2) 3×10^{-3} (3) 3×10^{-4}

(4) 3×10^{-5} (5) 3×10^{-6} (6) 3×10^{-7}

V

[A]

以下の問いに答えよ。

問１．粒子の質量を m、温度を T、ボルツマン定数を k として、粒子の速度 $\vec{v}$ のマクスウェル分布関数 $f(\vec{v})$ を以下の ① から ④ の中から選べ。

① $\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m|\vec{v}|^2/2kT}$　　② $\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2} e^{-m|\vec{v}|^2/2kT}$

③ $\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-2kT/m|\vec{v}|^2}$　　④ $\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2} e^{-2kT/m|\vec{v}|^2}$

問２．平均値と分散について説明した以下の文の $\boxed{1}$ から $\boxed{6}$ に入る正しいものを下の ① から ⑦ の中から選べ。

ある変数 x についての確率分布を $P(x)$ とすると、x の平均値 $\langle x\rangle$ の定義は、以下の式で与えられる。

$$\langle x\rangle = \boxed{1}$$

平均値からのずれ方の程度を示す分散 σ^2 の定義は以下の式で与えられる。

$$\sigma^2 = \sum_x \left(x - \boxed{2}\right)^2 P(x)$$

x^2 の平均値 $\langle x^2\rangle$ は、

$$\langle x^2\rangle = \boxed{3}$$

であり、

$$\boxed{4} = 1$$

であるので、結局、分散は以下の式で表すことができる。

$$\sigma^2 = \boxed{5} - \boxed{6}$$

① $\sum_x P(x)$　② $\sum_x xP(x)$　③ $\sum_x x^2 P(x)$　④ $\langle x\rangle$　⑤ $\langle x^2\rangle$

⑥ $\{\langle x\rangle\}^2$　⑦ $\langle x\rangle\langle x^2\rangle$

問３．（a）下の①から⑥の粒子のうち、フェルミ統計に従う粒子を全て選べ。

（b）下の①から⑥の粒子のうち、ボーズ統計に従う粒子を全て選べ。

① 電子　② 陽子　③ 中性子　④ 水素原子　⑤ 重水素原子

⑥ アルファ粒子

（次頁につづく）

[B]

N個の静止した原子からなる系がある。原子は全て区別できるとする。以下では、$\hbar = 1$ として考える。各原子は、電子スピン$\vec{s}$ （スピン量子数 $s = \frac{1}{2}$ ）と核スピン$\vec{I}$ （スピン量子数 $I = \frac{1}{2}$ ）をもち、それらの間には相互作用 $A(\vec{I} \cdot \vec{s})$ が働く$(A > 0)$。電子と核の間の他の相互作用は無視できる。原子間の相互作用は無視し、温度をT、ボルツマン定数をkとする。
以下の問いに答えよ。

問１．１原子あたりの分配関数を Z_1 とした時、N個の原子の系の分配関数 Z_N を以下の①から④の中から選べ。

① NZ_1　② Z_1^N　③ $\frac{Z_1^N}{N}$　④ $\frac{Z_1^N}{N!}$

問２．この系のヘルムホルツの自由エネルギー F を、以下の①から⑥の中から選べ。

① $-kT\,NZ_1$　② $-kT\ln(NZ_1)$　③ $-kT\,Z_1^N$　④ $-kT\,N\ln(Z_1)$

⑤ $-kT\frac{Z_1^N}{N}$　⑥ $-kT\,N\ln\left(\frac{Z_1}{N}\right)$

問３．(a) エントロピー S を表すものを、下の①から⑫の中から一つ選べ。
(b) 内部エネルギー U を表すものを、下の①から⑫の中から一つ選べ。
(c) 熱容量 C を表すものを、下の①から⑫の中から一つ選べ。

① NkT　② TS　③ TU　④ TC　⑤ $F + NkT$　⑥ $F + TS$

⑦ $F + TU$　⑧ $F + TC$　⑨ $-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)$　⑩ $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)$　⑪ $-\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)$　⑫ $\left(\frac{\partial C}{\partial T}\right)$

問４．原子のスピン$\vec{J}$を$\vec{J} = \vec{I} + \vec{s}$とし、$\vec{J}^2$ の固有値を $J(J+1)$ で表す。$J = 0$と$J = 1$の固有状態に対する $A(\vec{I} \cdot \vec{s})$ の期待値は、Aで表すことができる。

（次頁につづく）

（a）$J=0$ の固有状態に対する $A(\vec{I}\cdot\vec{s})$ の期待値を下の①から⑧の中から選べ。

（b）$J=1$ の固有状態に対する $A(\vec{I}\cdot\vec{s})$ の期待値を下の①から⑧の中から選べ。

① $-A$ ② $-\frac{3}{4}A$ ③ $-\frac{1}{2}A$ ④ $-\frac{1}{4}A$ ⑤ A ⑥ $\frac{3}{4}A$ ⑦ $\frac{1}{2}A$ ⑧ $\frac{1}{4}A$

問５．問４の結果を使って、１原子あたりの分配関数 Z_1 は、A、k、Tを使って表すことができる。この分配関数 Z_1 とその導出を説明する以下の文の $\boxed{1}$ から $\boxed{9}$ に入る正しい数字を下の①から⑤の中から選べ。

$J=\boxed{1}$ では、状態は一つしかないが、$J=\boxed{2}$ では、状態は$\boxed{3}$重に縮退している。よって、分配関数 Z_1 は以下の式で与えられる。

$$Z_1=\boxed{4}\exp\left(\frac{\boxed{5}A}{\boxed{6}kT}\right)+\boxed{7}\exp\left(-\frac{\boxed{8}A}{\boxed{9}kT}\right)$$

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

問６．（a）問１から問５の結果を使って、この系の内部エネルギー U は N、A、k、T を使って表すことができる。正しい式を以下の①から⑨の中から選べ。

① $-\frac{1}{4}NA+\frac{NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+1}$ ② $-\frac{1}{4}NA+\frac{2NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+2}$ ③ $-\frac{1}{4}NA+\frac{3NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3}$

④ $-\frac{1}{2}NA+\frac{NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+1}$ ⑤ $-\frac{1}{2}NA+\frac{2NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+2}$ ⑥ $-\frac{1}{2}NA+\frac{3NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3}$

⑦ $-\frac{3}{4}NA+\frac{NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+1}$ ⑧ $-\frac{3}{4}NA+\frac{2NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+2}$ ⑨ $-\frac{3}{4}NA+\frac{3NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3}$

（b）問１から問５、および問６（a）の結果を使って、この系の熱容量 C は N、A、k、T を使って表すことができる。正しい式を以下の①から⑨の中から選べ。

① $Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+1\right\}^2}$ ② $2Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+1\right\}^2}$ ③ $3Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+1\right\}^2}$

④ $Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+2\right\}^2}$ ⑤ $2Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+2\right\}^2}$ ⑥ $3Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+2\right\}^2}$

⑦ $Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3\right\}^2}$ ⑧ $2Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3\right\}^2}$ ⑨ $3Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3\right\}^2}$

V

[A]

Answer the following questions.

Q1. Let m be the mass of a particle, T the temperature and k the Boltzmann constant. Which of the following is the Maxwell distribution function $f(\vec{v})$ for the particle velocity $\vec{v}$?

① $\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m|\vec{v}|^2/2kT}$ ② $\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2} e^{-m|\vec{v}|^2/2kT}$

③ $\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-2kT/m|\vec{v}|^2}$ ④ $\left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2} e^{-2kT/m|\vec{v}|^2}$

Q2. The following sentences concern the average and the variance of a probability distribution. Substitute the boxes $\boxed{1}$ to $\boxed{6}$ with expressions from ① to ⑦.

Let $P(x)$ be the probability distribution for the random variable x. The definition of the average $\langle x \rangle$ of x is given by

$$\langle x \rangle = \boxed{1} \ .$$

The definition of the variance σ^2, a measure of the dispersion of $P(x)$ about $\langle x \rangle$, is

$$\sigma^2 = \sum_x \left(x - \boxed{2}\right)^2 P(x) \ .$$

The average $\langle x^2 \rangle$ of x^2 is

$$\langle x^2 \rangle = \boxed{3} \ .$$

Since

$$\boxed{4} = 1 \ ,$$

the variance is given by the following equation:

$$\sigma^2 = \boxed{5} - \boxed{6} \ .$$

① $\sum_x P(x)$ ② $\sum_x xP(x)$ ③ $\sum_x x^2 P(x)$ ④ $\langle x \rangle$ ⑤ $\langle x^2 \rangle$

⑥ $\{\langle x \rangle\}^2$ ⑦ $\langle x \rangle \langle x^2 \rangle$

Q3. (a) Select all particles in ① - ⑥ that follow Fermi statistics.

(b) Select all particles in ① - ⑥ that follow Bose statistics.

① Electron ② Proton ③ Neutron ④ Hydrogen atom ⑤ Deuterium atom ⑥ Alpha particle

(Continued on the next page)

[B]

Consider a system that consists of N stationary atoms. Let all atoms be distinguishable. In the following, assume $\hbar = 1$. All atoms have electron spin $\vec{s}$ (spin quantum number $s = \frac{1}{2}$) and nuclear spin $\vec{I}$ (nuclear quantum number $I = \frac{1}{2}$) and between them the interaction $A(\vec{I} \cdot \vec{s})$ $(A > 0)$. Other interactions between the electron and the nucleus as well as interactions between atoms can be ignored. Let T be the temperature and k the Boltzmann constant.
Answer the following questions.

Q1. If the partition function for one atom is Z_1, which of the following is the partition function for N atoms, Z_N ?

① NZ_1 ② Z_1^N ③ $\frac{Z_1^N}{N}$ ④ $\frac{Z_1^N}{N!}$

Q2. Which of the following is the correct expression for the Helmholtz free energy F in this system?

① $-kT\,NZ_1$ ② $-kT\ln(NZ_1)$ ③ $-kT\,Z_1^N$ ④ $-kT\,N\ln(Z_1)$

⑤ $-kT\frac{Z_1^N}{N}$ ⑥ $-kT\,N\ln\left(\frac{Z_1}{N}\right)$

Q3. (a) Which of the expression ① to ⑫ below is the expression for the entropy S ?

(b) Which of the expression ① to ⑫ below is the expression for the internal energy U ?

(c) Which of the expression ① to ⑫ below is the expression for the heat capacity C ?

① NkT ② TS ③ TU ④ TC ⑤ $F + NkT$ ⑥ $F + TS$

⑦ $F + TU$ ⑧ $F + TC$ ⑨ $-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)$ ⑩ $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)$ ⑪ $-\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)$ ⑫ $\left(\frac{\partial C}{\partial T}\right)$

Q4. Let $J(J+1)$ be the eigenvalue of $\vec{J}^2$ if the atomic spin $\vec{J}$ is $\vec{J} = \vec{I} + \vec{s}$. The expected value of $A(\vec{I} \cdot \vec{s})$ for the eigenstate for $J = 0$ and $J = 1$ can be expressed in terms of A .

(Continued on the next page)

(a) Select the correct expression for the expected value of $A(\vec{I}\cdot\vec{s})$ for the $J=0$ eigenstate from the expressions ① to ⑧ below.

(b) Select the correct expression for the expected value of $A(\vec{I}\cdot\vec{s})$ for the $J=1$ eigenstate from the expressions ① to ⑧ below.

① $-A$ ② $-\frac{3}{4}A$ ③ $-\frac{1}{2}A$ ④ $-\frac{1}{4}A$ ⑤ A ⑥ $\frac{3}{4}A$ ⑦ $\frac{1}{2}A$ ⑧ $\frac{1}{4}A$

Q5. Using the answers from Q.4, the partition function for one atom, Z_1 , can be expressed in terms of A, k and T. Substitute the boxes $\boxed{1}$ to $\boxed{9}$ in the following sentences that explain the partition function Z_1 and its derivation with the correct numbers, choosing from options ① to ⑤ below.

For $J=\boxed{1}$, there is only one eigenstate. However, for $J=\boxed{2}$, the degeneracy of the eigenstate is $\boxed{3}$. Thus, the partition function Z_1 is given by the following equation:

$$Z_1=\boxed{4}\exp\left(\frac{\boxed{5}A}{\boxed{6}kT}\right)+\boxed{7}\exp\left(-\frac{\boxed{8}A}{\boxed{9}kT}\right).$$

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

Q6. (a) Using the answers from Q1 to Q5, the internal energy U in this system can be expressed in terms of N, A, k and T. Which of the following is the correct expression for the internal energy U ?

① $-\frac{1}{4}NA+\frac{NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+1}$ ② $-\frac{1}{4}NA+\frac{2NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+2}$ ③ $-\frac{1}{4}NA+\frac{3NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3}$

④ $-\frac{1}{2}NA+\frac{NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+1}$ ⑤ $-\frac{1}{2}NA+\frac{2NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+2}$ ⑥ $-\frac{1}{2}NA+\frac{3NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3}$

⑦ $-\frac{3}{4}NA+\frac{NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+1}$ ⑧ $-\frac{3}{4}NA+\frac{2NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+2}$ ⑨ $-\frac{3}{4}NA+\frac{3NA}{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3}$

(b) Using the answers from Q1 to Q5 and Q6 (a), the heat capacity C in this system can be expressed in terms of N, A, k and T. Which of the following is the correct expression for the heat capacity C ?

① $Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+1\right\}^2}$ ② $2Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+1\right\}^2}$ ③ $3Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+1\right\}^2}$

④ $Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+2\right\}^2}$ ⑤ $2Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+2\right\}^2}$ ⑥ $3Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+2\right\}^2}$

⑦ $Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3\right\}^2}$ ⑧ $2Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3\right\}^2}$ ⑨ $3Nk\left(\frac{A}{kT}\right)^2\frac{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)}{\left\{\exp\left(\frac{A}{kT}\right)+3\right\}^2}$