平成３０年度

筑波大学大学院　数理物質科学研究科　入学試験

物理学専攻　試験問題

専門科目

注意事項

1. 5 つの問題（I〜V）がある。問題 I では、10 問中 5 問を選んで解答せよ。問題 II〜V では、基礎問題と応用問題（[A]、[B]）の両方とも解答せよ。問題文は、最初日本語で、次に英語で書かれている。問題の内容は同じものである。解答は、日本語と英語のどちらで書いてもよい。

   There are five problems (I〜V). For the problem I you must answer five out of ten questions. Each of the problems II〜V consists of basic and advanced problems ([A], [B]). Answer both of them. All the problems are written first in Japanese, and then in English. The contents of the problems are the same. You may write the answer either in Japanese or in English.

2. それぞれの問題に一枚の解答用紙を用い解答せよ。また、解答した問題番号を明記せよ。

   For each problem, use one sheet of answer paper. Write the number of the problem on the answer sheet.

3. 下書き用紙は採点の対象としない。

   Draft paper will not be marked.

I

以下の 10 問のうち5問を選択し、問題番号を明記の上、解答せよ。

問 1.　次の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

問 2.　y が x の関数として、$y^2 = v$ とおいて次の微分方程式を解け。

$$2xy\frac{dy}{dx} + x = y^2$$

問 3.　$f(x)$ が $x = 0$ で微分可能な関数とするとき、次の積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta'(x)$$

ただし、$\delta'(x)$ はディラックのデルタ関数の導関数である。

問 4.　行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

を因数分解せよ。

問 5.　次の行列の固有値を全て求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(次頁につづく)

問 6. A を任意の $n \times n$ 複素行列とする。A のエルミート共役 $A^\dagger$ を、その ij 成分 $\left(A^\dagger\right)_{ij}$ が

$$\left(A^\dagger\right)_{ij} = A^*_{ji}$$

で与えられる $n \times n$ 複素行列であると定義するとき、$A^\dagger A$ の固有値 λ は $\lambda \geq 0$ を満たすことを示せ。

問 7. $\vec{r} = (x, y, z)$ を 3 次元位置ベクトル、$a > 0$ とするとき、

$$\int\int\int_{|\vec{r}| \leq a} dxdydz \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right)$$

を計算せよ。

問 8. C : $|z| = 2$ の積分路に沿って、以下の複素積分の値を求めよ。ただし、積分路は反時計回りとする。

$$\oint_{\mathrm{C}} \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz$$

問 9. $\vec{r} = (x, y, z)$ を 3 次元位置ベクトル、$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ として

$$G(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\left|\vec{k}\right|^2 + m^2}$$

は方程式 $\left(\vec{\nabla}^2 - m^2\right) G(\vec{r}) = -\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$ を満たすことを示せ。

問 10. 関数 f のラプラス変換 $L[f]$ を

$$L[f](s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} f(t)$$

と定義するとき、次の逆ラプラス変換を求めよ。

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 3s - 4}\right]$$

I

Answer five out of the following ten questions. Begin by writing the question numbers on the answer sheet clearly.

Q1. Evaluate

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Q2. Let y be a function of x. Solve the following differential equation, assuming $y^2 = v$:

$$2xy\frac{dy}{dx} + x = y^2 .$$

Q3. Let $f(x)$ be a function of x differentiable at $x = 0$ and $\delta'(x)$ be the derivative of the Dirac delta function. Evaluate

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta'(x) .$$

Q4. Calculate the determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

and present the result in factored form.

Q5. Find all the eigenvalues of the following matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(To be continued on the next page)

Q6. Let A be an $n \times n$ complex matrix. The hermitian conjugate $A^\dagger$ of A is the $n \times n$ complex matrix with its ij element $\left(A^\dagger\right)_{ij}$ given by

$$\left(A^\dagger\right)_{ij} = A^*_{ji} \,.$$

Prove that the eigenvalues λ of $A^\dagger A$ satisfy $\lambda \geq 0$.

Q7. Let $\vec{r} = (x, y, z)$ be the three dimensional position vector. Evaluate

$$\int\int\int_{|\vec{r}|\leq a} dxdydz \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right) ,$$

for $a > 0$.

Q8. Let C be the contour which goes around the circle $|z| = 2$ counter-clockwise once. Evaluate

$$\oint_{\mathrm{C}} \frac{\sin z}{z^2+1} dz \,.$$

Q9. Let $\vec{r} = (x, y, z)$ be the three dimensional position vector. Show that

$$G(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x dk_y dk_z}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\left|\vec{k}\right|^2 + m^2}$$

with $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, satisfies the equation $\left(\vec{\nabla}^2 - m^2\right) G(\vec{r}) = -\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$.

Q10. Let us define the Laplace transform $L[f]$ of a function f as

$$L[f](s) = \int_0^\infty dt e^{-st} f(t) \,.$$

Find the following inverse Laplace transform

$$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3s-4}\right] .$$

II

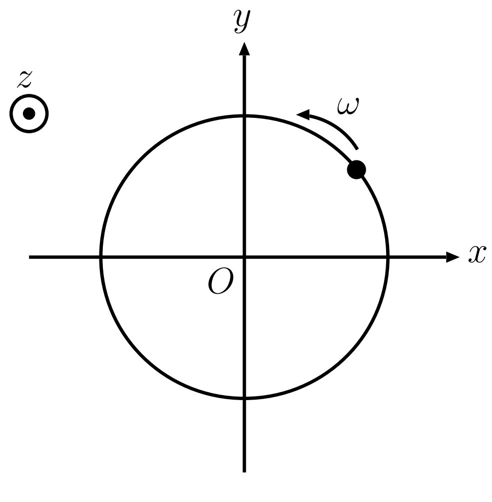
[A]

問 1. 質量 m の質点が鉛直方向に落下する運動を考える。重力加速度を g として、以下の問に答えよ。m, g 以外の変数を用いる時は、その定義を書くこと。

(a) この系のラグランジアン L を書け。さらに、L についてのオイラー・ラグランジュ方程式を書き、質点の運動方程式を求めよ。
(b) 質点の力学的エネルギーは保存することを示せ。

問 2. 下図のように、質量 m の質点が xy 平面内にある半径 R の円周上を、左回りに角速度 ω で等速円運動している。円の中心を原点 O とし、質点は $t = 0$ で位置 $\vec{r} = (R, 0, 0)$ にあったとする。z 軸の正方向を紙面の裏から表の向きとし、以下の問に答えよ。与えられた変数以外の変数を用いる時は、その定義を書くこと。

(a) 質点の速度は常に質点の位置ベクトルと直交することを示せ。
(b) 原点回りの質点の角運動量の大きさと向きを答えよ。



(次頁につづく)

[B]

下図のような板の上に載せた円柱の運動を考える。

水平な床の上に十分長い粗い板が静止している。その板の上に半径 R、長さ L、質量 M の円柱が静止している。円柱の密度は一様とする。円柱の重心を通り、円柱の長さ方向に平行な軸を中心軸と呼ぶこととする。

問 1. 円柱の中心軸回りの慣性モーメント I を求めよ。

板を水平右向きに等加速度 a で引くと、円柱は板の上で滑らずに中心軸回りに回転を始めた。板の進行方向と円柱の中心軸は常に垂直とする。板と円柱の接触部分には図のように摩擦力 F が働いている。水平に右に進む向きを x 軸の正の向きとし、床に固定された原点 O から見た円柱の重心の速度を V とする。図のように左回りの円柱の角速度を ω として、以下の問に答えよ。

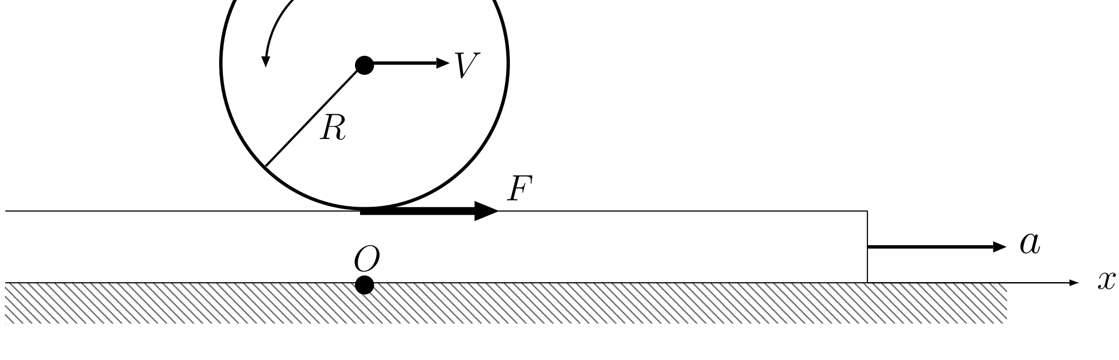
問 2. 円柱の重心の x 方向の運動方程式を書け。

問 3. 円柱の中心軸回りの回転の運動方程式を書け。解答には I を使っても良い。

問 4. 重心の加速度 $\dfrac{dV}{dt}$、角加速度 $\dfrac{d\omega}{dt}$、および板の加速度 a の間に成立する関係式を書け。

問 5. 円柱の角加速度 $\dfrac{d\omega}{dt}$ を求め、a と R を用いて答えよ。

問 6. 板と円柱の間の静止摩擦係数を μ、重力加速度を g として、円柱が滑らずに回転するための a の条件を求めよ。



II

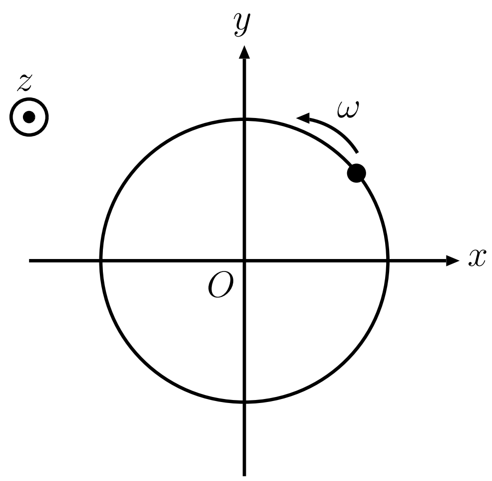
[A]

Q1. Consider a free fall of a point mass of m in the vertically downward direction. Let g be the gravitational acceleration. Answer the following questions. Define all variables that you may use except for m and g.

(a) Write down the Lagrangian L of the point mass. Then write down the Euler-Lagrange equation for the Lagrangian L, and obtain the equation of motion of the point mass.
(b) Show that the mechanical energy of the point mass is conserved.

Q2. Consider a uniform circular motion of a point mass of m on the circle of radius R in the xy plane. Let ω be the counterclockwise angular velocity of the point mass, O be the origin, and the positive z direction come out of the page, as shown in the figure below. At $t = 0$, the point mass is at the position $\vec{r} = (R, 0, 0)$. Answer the following questions. Define all variables that you may use except for m, R, ω, and $\vec{r}$.

(a) Prove that the velocity of the point mass is always perpendicular to the position vector $\vec{r}$.
(b) Write down the direction and magnitude of the angular momentum of the point mass around the origin.



(To be continued on the next page)

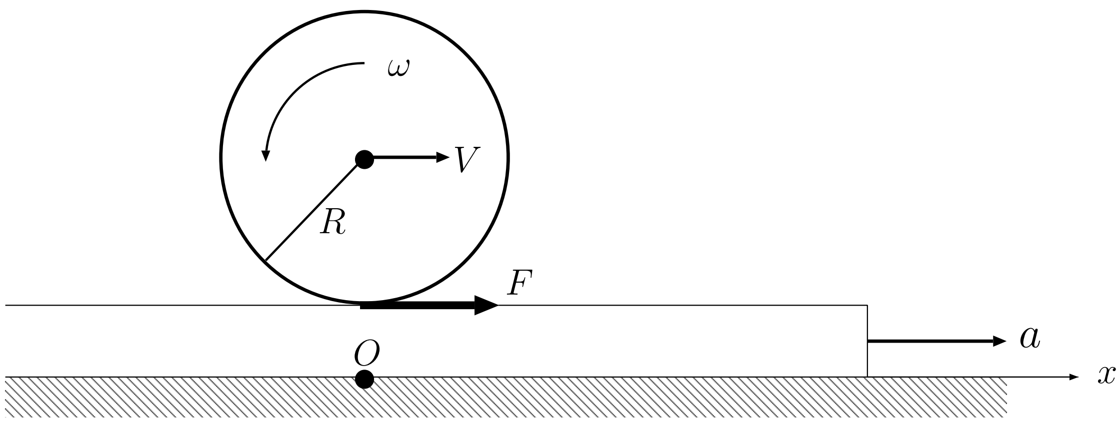
[B]

Let us consider the motion of a cylinder on a board as shown in the figure below.

A long board with rough surfaces is at rest on the horizontal floor. A uniform cylinder of mass m, length L, and radius R is at rest on the board. We shall define the central axis as the axis that goes through the center of mass of the cylinder and is parallel to the direction of the length L.

Q1. Calculate the moment of inertia I of the cylinder around the central axis.

When one pulls the board in the horizontal direction to the right by a constant acceleration a, the cylinder starts to rotate around the central axis on the board without slipping. The moving direction of the board is always perpendicular to the central axis of the cylinder. As shown in the figure, there is a friction F in the contact part between the board and cylinder. The positive x direction is the horizontal right direction. Let V be the velocity of the center of mass of the cylinder in the inertial frame where the origin O is fixed on the floor, and ω be the counterclockwise angular velocity of the cylinder as shown in the figure. Answer the following questions.



(To be continued on the next page)

Q2. Write down the equation of motion of the center of mass of the cylinder in the x direction.

Q3. Write down the rotational equation of motion of the cylinder around the central axis. If necessary, one can use I in Q1.

Q4. Write down the relation among the acceleration $\frac{dV}{dt}$, the angular acceleration $\frac{d\omega}{dt}$, and the acceleration a of the board.

Q5. Obtain the angular acceleration $\frac{d\omega}{dt}$ and express it using a and R.

Q6. Let μ be the coefficient of static friction between the board and the cylinder, and g be the gravitational acceleration. Obtain the criterion for a under which the cylinder rotates without slipping.

III

$\hbar = h/2\pi$ (h はプランク定数) として以下の問に答えよ。

[A]

問 1. 質量 m の粒子がポテンシャル $V(x)$ 中で x 軸に沿って運動する 1 次元量子系を考える。波動関数 $\psi(x,t)$ の満たす時間 t に依存するシュレーディンガー方程式を記せ。

問 2. 位置座標 x の関数 $f(x)$ を波動関数 $\psi(x,t)$ に作用する演算子として、交換関係 $\left[\dfrac{\partial}{\partial x}, f(x)\right] = \dfrac{\partial}{\partial x} f(x)$ を示せ。但し、$\psi(x,t)$ と $f(x)$ は x について微分可能とする。

問 3. ハミルトニアン H が時間 t に依らない時、波動関数 $\psi(x,t)$ の時間発展は演算子 $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ により $\psi(x,t) = U(t)\psi(x,0)$ と表される。H がエルミートであることを用いて、確率密度 $|\psi(x,t)|^2$ が時間に依らないことを示せ。

(次頁につづく)

[B]

量子力学では粒子の波動性により古典力学では起こりえない興味深い現象が可能となる。図 1 のように $V(x) = 0$ (領域 I : $x < 0$, 領域 III : $a < x$), V_0 (領域 II : $0 < x < a$) となる長方形ポテンシャルを持つ 1 次元量子系を例にこのような現象を考えよう。$x < 0$ からエネルギー E、質量 m の粒子が入射する。定常状態の波動関数 $\varphi(x)$ は定数 A, B, C, D, F を用いて

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (\text{領域 I}) \\ Ce^{\rho x} + De^{-\rho x} & (\text{領域 II}) \\ Fe^{ikx} & (\text{領域 III}) \end{cases}$$

と表される。但し、$0 < E < V_0$ とし、k と ρ は正とする。

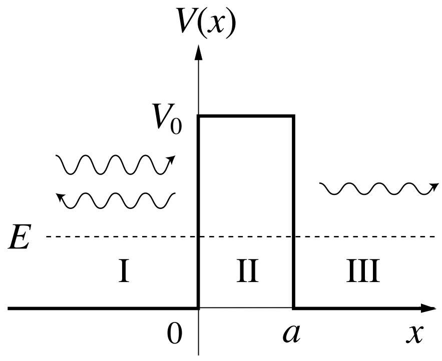


図 1

問 1. k と ρ を $E, V_0, m, \hbar$ を用いて表せ。
問 2. 各領域の解をつなぐ接続条件を記し、係数 C, D を F で表せ。
問 3. ポテンシャル障壁を透過する確率が小さい場合、領域 II 中の増大関数の寄与は小さく $|C| \ll |D|$ となる。この近似の下で A, B を F で表せ。この時、透過率は $T \approx \tau e^{-2\rho a}$ の形となる。τ を k と ρ を用いて表せ。

(次頁につづく)

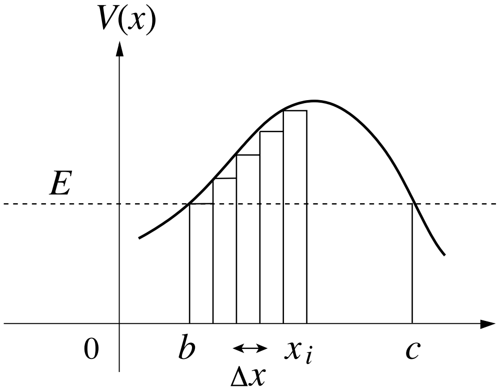


図 2

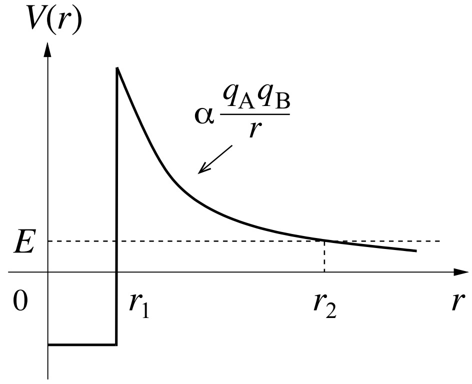


図 3

図 1 で $V_0 > E$ となる幅 a の領域 II 内では波動関数 $De^{-\rho x}$ は減衰し、領域 II の左端 $(x=0)$ と右端 $(x=a)$ での大きさの比は $e^{-\rho a}$、問 3 の透過率 T の指数部分はその 2 乗 $e^{-2\rho a}$ となっている。この指数部分

$$W = (\text{領域前後の波動関数の大きさの比})^2$$

を透過因子と呼ぶ。この結果を用いて、より一般の滑らかなポテンシャル障壁を透過する場合を考えよう。エネルギー E、質量 m の粒子が図 2 のような滑らかなポテンシャル $V(x)$ に $x<0$ から入射するとする。$V(x)>E$ となる領域 (b,c) で微小な幅 Δx の長方形ポテンシャルが多数あると考える。点 $x=x_i$ 付近の微小区間ではポテンシャルは定数 $V(x_i)$ で近似でき、減衰する波動関数は D_i, ρ_i を定数として $D_i e^{-\rho_i x}$ で与えられる。

問 4. 各微小区間での減衰する波動関数を接続することにより領域 (b,c) での波動関数を構成する。透過因子 W を求め、$E, V(x), m, \hbar$ を用いて表せ。

問 5. 電荷 $q_\mathrm{A}, q_\mathrm{B}$ の 2 つの原子核 A,B 間のポテンシャルは、距離 r を用いて模式的に図 3 のように表され、$r_1 < r$ では $V(r) = \alpha q_\mathrm{A} q_\mathrm{B}/r$ ($\alpha > 0$ は定数) となる。原子核対が核融合を起こすためにはこのポテンシャル障壁を透過し $r < r_1$ の領域に到達する必要がある。相対運動のエネルギー $E > 0$ を与えた時の透過因子を $W_{\text{A-B}}$ とする。太陽中の主な元素である水素とヘリウムの場合に問 4 の結果を適用し、$W_{\text{H-H}}$ と $W_{\text{He-He}}$ の関係を調べよ。

但し、H と He の質量比は $m_\mathrm{He}/m_\mathrm{H} = 4$ とし、原子核対の相対運動に用いられる質量は各原子核の質量 $m_{\mathrm{A,B}}$ により $m = m_\mathrm{A} m_\mathrm{B}/(m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B})$ で与えられる換算質量である。H-H, He-He どちらの場合も r_1 は $V(r_2) = E$ となる距離 r_2 より十分小さいとし、$\frac{1}{\sqrt{r_2}} \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}} \approx \frac{\pi}{2}$ を用いてよい。角運動量の効果はないとする。

III

In the following, let $\hbar = h/2\pi$ where h is the Planck constant.

[A]

Q1. Consider a one-dimensional quantum system where a particle of mass m moves along the x axis in a potential $V(x)$. Write down the time (t) dependent Schrödinger equation that is satisfied by the wave function $\psi(x,t)$.

Q2. Let a function $f(x)$ of the coordinate x be an operator acting on the wave function $\psi(x,t)$. Show the commutation relation $\left[\frac{\partial}{\partial x}, f(x)\right] = \frac{\partial}{\partial x} f(x)$, where $\psi(x,t)$ and $f(x)$ are differentiable with respect to x.

Q3. For a Hamiltonian H which is independent of time t, the time evolution of the wave function $\psi(x,t)$ is described by the operator $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ as $\psi(x,t) = U(t)\psi(x,0)$. Show that the probability density $|\psi(x,t)|^2$ is time-independent when H is hermitian.

(To be continued on the next page)

[B]

In quantum mechanics, the wave-like character of particles allows interesting phenomena which are impossible in classical mechanics to take place. Let us consider such phenomena in the example of a one-dimensional system with a rectangular potential $V(x) = 0\,$(region I : $x < 0$, region III : $a < x$), $V_0\,$(region II : $0 < x < a$) as in Figure 1. Let a particle of energy E and mass m be incident on the potential barrier from $x < 0$. The wave function $\varphi(x)$ of the stationary state is then expressed by using constants A, B, C, D, F as

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{(region I)} \\ Ce^{\rho x} + De^{-\rho x} & \text{(region II)} \\ Fe^{ikx} & \text{(region III)} \end{cases}$$

where $0 < E < V_0$, and k and ρ are positive.

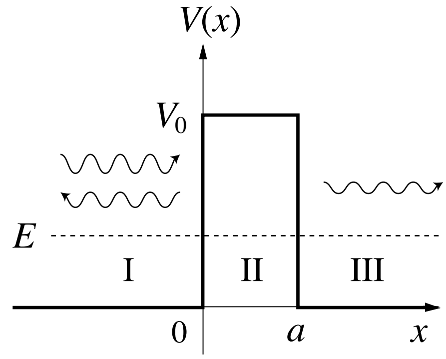


Figure 1

Q1. Determine k and ρ in terms of $E, V_0, m, \hbar$.

Q2. Write down the continuity conditions to connect the solutions in different regions, and determine C and D in terms of F.

Q3. When the transmission coefficient through the potential barrier is small, the contribution from the increasing component of $\varphi(x)$ in region II is small and hence $|C| \ll |D|$. In this approximation, determine A and B in terms of F. In this case, the transmission coefficient takes the form $T \approx \tau e^{-2\rho a}$. Determine τ in terms of k and ρ.

(To be continued on the next page)

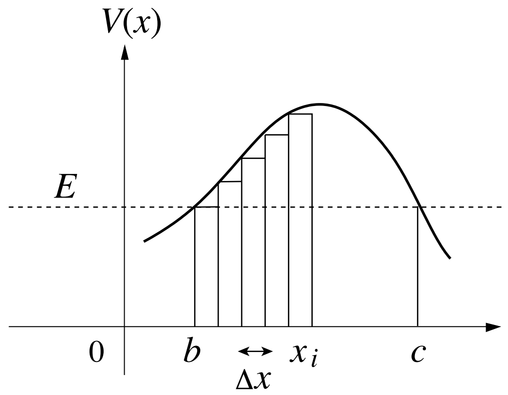


Figure 2

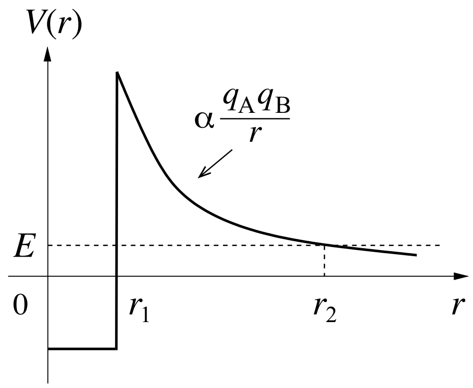


Figure 3

In region II of width a where $V_0 > E$, the wave function $De^{-\rho x}$ decreases. Its ratio at both ends is $e^{-\rho a}$, and the exponential part of the transmission coefficient in Q3 is equal to its square, $e^{-2\rho a}$. Let us call this exponential part,

$$W = (\text{the ratio of the wave function at both ends of the region})^2 ,$$

the penetration factor. Using this result, let us discuss the case where a particle is transmitted through a more general and smooth potential barrier. Let a particle of energy E and mass m be incident on a smooth potential $V(x)$ from $x < 0$ as in Figure 2. Suppose, in the region (b, c) where $V(x) > E$, the potential consists of rectangular potentials of small width Δx. The potential around $x = x_i$ can then be approximated by a constant $V(x_i)$, and the decreasing wave function is given by $D_i e^{-\rho_i x}$ with D_i and ρ_i being constants.

Q4. The wave function in the region (b, c) is obtained by connecting the decreasing wave functions in small regions. Calculate the penetration factor and express it in terms of $E, V(x), m, \hbar$.

(To be continued on the next page)

Q5. The potential between two nuclei A and B of charge q_{A} and q_{B}, respectively, is schematically given as in Figure 3 with r being their distance. For $r_1 < r$, it is $V(r) = \alpha q_{\mathrm{A}} q_{\mathrm{B}}/r$ where $\alpha > 0$ is a constant. These nuclei can fuse when transmitted through the potential into the region $r_1 < r$. Let $W_{\text{A-B}}$ be the corresponding penetration factor for given energy $E > 0$. Apply the result in Q4 to hydrogen (H) and helium (He), the main elements in the sun, and discuss the relation between $W_{\text{H-H}}$ and $W_{\text{He-He}}$.

Here, let the ratio of the masses of H and He be $m_{\mathrm{He}}/m_{\mathrm{H}} = 4$. The mass parameter for the relative motion of the nuclei is the reduced mass $m = m_{\mathrm{A}} m_{\mathrm{B}}/(m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}})$ given by the masses of the nuclei $m_{\mathrm{A,B}}$. In both cases, H-H and He-He, assume that r_1 is sufficiently smaller than r_2 defined through $V(r_2) = E$, and use the formula $\frac{1}{\sqrt{r_2}} \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}} \approx \frac{\pi}{2}$. Assume also that the effect of angular momentum is ignorable.

IV

[A]

問 1. 図 1 のように、真空中で半径 a の円周上に全電荷 Q が一様に分布している。円の中心軸を z 軸 ($z = 0$ は円の中心 O) として、この軸上の点 P でのポテンシャル $\phi(z)$ と電場 $\vec{E}(z)$ を求めよ。ポテンシャルは無限遠でゼロとし、真空の誘電率は ϵ_0 とする。

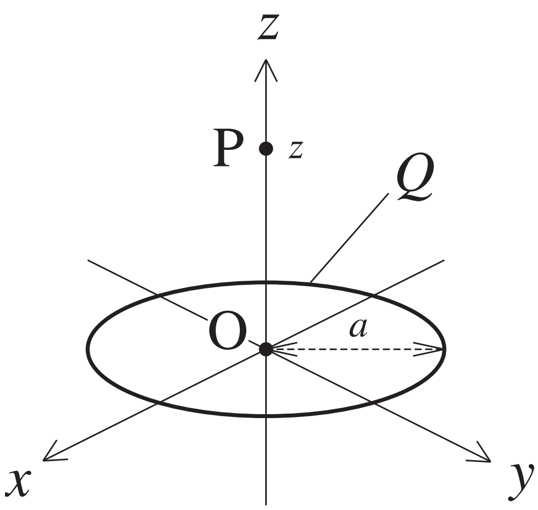


図 1

問 2. 真空中の電場 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ を記述するマクスウェル方程式のうち、次の 2 つの式を用いて、電荷密度 ρ と電流密度 $\vec{J}$ に対する連続の方程式 (電荷保存則) を導け。

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$\vec{E}$、$\vec{B}$、ρ、$\vec{J}$ は空間座標と時刻 t の関数であり、ϵ_0 と μ_0 は真空の誘電率と透磁率である。

(次頁につづく)

問 3. 真空中を伝搬する電磁波の電場が、直交座標 x、y、z および時刻 t の関数として、次のように表されるとする。

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = 20\cos(6\pi \times 10^8 t + 2\pi x)$$

単位はそれぞれ E [V/m]、t [s]、x [m] である。この波の振動数、波長、伝搬方向を求めよ。また、ファラデーの法則の微分形

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

を用いて、この電磁波の磁束密度の $t = 0$ かつ $x = 0$ での大きさと方向を求めよ。磁束密度の単位は [T]=[Wb/m^2] を用いること。[Wb]=[V·s] である。

(次頁につづく)

[B]

図２のように、真空中で y 軸に沿って $+y$ 方向の電流 I が流れている無限に長い直線導線の近くに、閉回路 ABCD を置く。点 A、B、C、D は xy 面内にあり、一辺の長さが $2a$ の正方形の頂点である。回路の BC 間と DA 間の導線は y 軸に平行な直線であるが、AB 間と CD 間の導線はそれぞれ xz 面に平行な面内 $(z \geq 0)$ にある半円である。AB および CD の中点の x 座標を l $(-a < l < a)$ とおく。導線は絶縁されており、十分に細く、太さは常に無視できるものとして、以下の問いに答えよ。真空の透磁率を μ_0 とする。

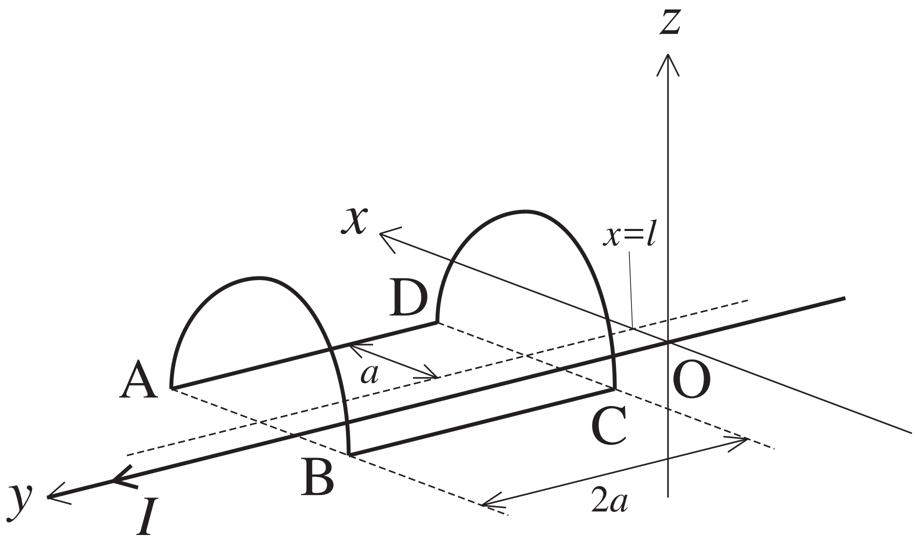


図２

問 1. 閉回路 ABCD を $+z$ 方向に貫く磁束を求めよ。

問 2. 電流 I が $I(t) = I_0 \sin \omega t$ (I_0 と ω は定数) のように時刻 t に依存して変化するとき、閉回路 ABCD に生じる起電力をファラデーの法則を用いて求めよ。ただし、誘導電流の向きが B から C に向かうときの起電力を正とする。

(次頁につづく)

次に、電流 I を一定にして $(I=I_1)$、閉回路 ABCD を $+x$ 方向に速度 v で運動させる。

問 3. 閉回路 ABCD に生じる起電力を求めよ。ただし、誘導電流の向きが B から C に向かうときの起電力を正とする。

問 4. 閉回路 ABCD に働く力の大きさと方向を求めよ。回路の抵抗は R とする。

問 5. 閉回路 ABCD は有限の質量をもつものとする。時刻 $t=0$ に $-a<l(t=0)=l_0<0$ にある回路に $+x$ 方向の運動量を与え、以降は外力を加えないとき、$t>0$ での回路の運動の説明として正しいものを、以下の選択肢から全て選べ。また、それを選んだ理由を記述せよ。

(a) $t=0$ で与えられる運動量が十分大きければ、$l=a$ を越えて運動する。

(b) 振動せずに減速する。$l=a$ を超えて運動することはない。

(c) $l=0$ を中心とする x 軸方向の減衰振動を行う。

(d) $l=0$ を中心とする x 軸方向の振動を永久に続ける。

(e) (a) から (d) の選択肢に正しいものはない。

IV

[A]

Q1. A total electric charge Q is uniformly distributed over the perimeter of a circle with radius a, and is placed in vacuum (Fig. 1). We define the z-axis as the perpendicular to the circle, and its origin O ($z = 0$) as the circle center. Find the scalar potential $\phi(z)$ and the electric field vector $\vec{E}(z)$ at a position P on the z-axis. We assume the potential to be zero at infinite distance. Use the electric permittivity of vacuum, ϵ_0.

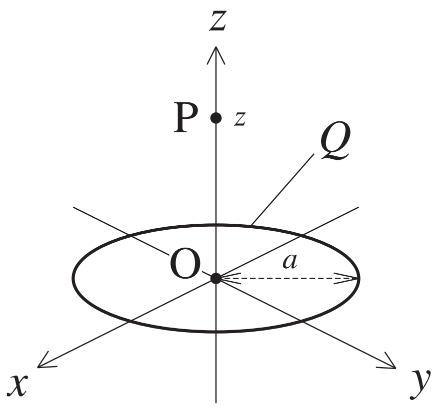


Figure 1

Q2. Use the following two Maxwell's equations, which describe the electric field $\vec{E}$ and the magnetic flux density $\vec{B}$ in vacuum, and derive the equation of continuity which relates the electric charge density ρ to the current density $\vec{J}$ (the conservation law of charge).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ, and $\vec{J}$ are functions of spatial coordinates and time t. ϵ_0 and μ_0 are the electric permittivity and magnetic permeability of vacuum, respectively.

(To be continued on the next page)

Q3. Suppose that an electromagnetic wave propagating in vacuum has electric-field components which depend on Cartesian coordinates x, y, z, and time t as

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = 20\cos(6\pi \times 10^8 t + 2\pi x).$$

We use the units of values, E [V/m], t [s], and x [m]. Find the frequency, wavelength, and propagation direction of this wave. Then, use the differential form of Faraday's law,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

to find the direction and magnitude of the magnetic flux density $\vec{B}$ at $t = 0$ and $x = 0$ of the wave. Use the unit [T]=[Wb/m^2] ([Wb]=[V·s]) for the magnitude.

(To be continued on the next page)

[B]

Consider a closed circuit ABCD which is placed near an infinitely-long straight-line conducting wire in vacuum (Fig. 2). We define the y-axis along the straight-line wire, where an electric current I flows in the $+y$ direction. All the points A, B, C, and D in the closed circuit are on the xy-plane, and make a square with a side of $2a$. The wires of BC and DA of the circuit are straight and parallel to the y-axis, while those of AB and CD are semicircular and lie on the planes parallel to the xz-plane ($z \geq 0$). We use l to denote the x coordinate of the midpoint of AB or CD ($-a < l < a$). Suppose all the wires are electrically insulated, and very thin so that we can neglect their cross-sectional sizes in any case. The magnetic permeability of vacuum is μ_0. Answer the following questions.

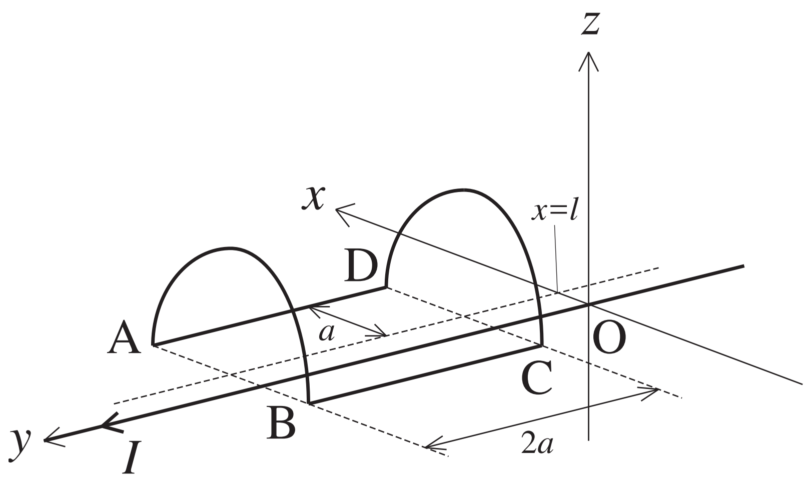


Figure 2

Q1. Calculate the magnetic flux that passes through the wire loop of the closed circuit ABCD in the $+z$ direction.

Q2. Use the Faraday's law of induction, and find the electromotive force (EMF) produced in the closed circuit ABCD when the current I varies sinusoidally with time t : $I(t) = I_0 \sin \omega t$. (I_0 and ω are constants.) We define the EMF to be positive when it induces current in the direction of B $\rightarrow$ C.

(To be continued on the next page)

Now, suppose that the current I is constant ($I = I_1$), and the closed circuit ABCD is moving in the $+x$ direction with a velocity v.

Q3. Calculate the EMF produced in the closed circuit ABCD. We define the EMF to be positive when it induces current in the direction of B $\rightarrow$ C.

Q4. Find the direction and magnitude of mechanical force acting on the closed circuit ABCD. Use the electric resistance R of the circuit.

Q5. Suppose that the closed circuit ABCD has a finite mass. It is located at $-a < l(t = 0) = l_0 < 0$ at time $t = 0$, when we give it some kinetic momentum in the $+x$ direction. We let it move freely with no further external force acting on it. Determine which of the following scenario(s) describe(s) the motion of the closed circuit ABCD at $t > 0$. Explain why you think they are probable.

(a) If the momentum given at $t = 0$ is large enough, it is possible for the circuit to go beyond $l = a$.

(b) The circuit slows down monotonically without any oscillation. It is impossible to go beyond $l = a$.

(c) The circuit exhibits damped oscillation along the $x-$axis around the center at $l = 0$.

(d) The circuit oscillates permanently along the $x-$axis around the center of $l = 0$.

(e) None of the above scenarios are appropriate in describing the motion.

V

[A]

以下の問に答えよ。

問 1. エネルギー $\pm\epsilon$ を持つ独立な 2 準位系 N 個からなる系が温度 T の熱浴と熱平衡状態にある。この系の分配関数を求めよ。ただし、ボルツマン定数を k_B とせよ。

問 2. フェルミ粒子を 1 つあげよ。また、フェルミ統計に関係する物理現象を一つ述べよ。

問 3. ボーズ粒子を 1 つあげよ。また、ボーズ統計に関係する物理現象を一つ述べよ。

問 4. 氷が水になる相転移は 1 次相転移か否か理由とともに述べよ。

(次頁につづく)

[B]

系の温度を T、圧力を p、エントロピーを S、内部エネルギーを U、体積を V として、以下の問に答えよ。ただし、偏微分は固定する変数を明示せよ。

問 1. 準静的過程における熱力学第一法則を無限小変化 dS, dU, dV を用いて表せ。

問 2. ヘルムホルツの自由エネルギー F を U, T, S を用いて書け。

問 3. F の無限小変化 dF を計算し、その結果を用いて S と p を F を用いて書け。

問 4. 次の関係式を導け。

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

内部エネルギーが体積に比例するとして $U = V\epsilon$ と書く。ただし、ϵ は T のみの関数とする。

問 5. 熱力学第一法則を用いて、エントロピーの無限小変化を

$$dS = AdV + BdT$$

と書いた時の係数 A と B を ϵ, p, V, T を用いて表せ。

問 6. エントロピー密度を $\sigma = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ と定義するとして、次の関係式を示せ。

$$\sigma = \frac{\epsilon + p}{T}$$

V

[A]

Answer the following questions.

Q1. Let us consider a system, which is composed of N independent two-level-systems with energies $\pm\epsilon$. Find the distribution function when this system is in a thermal equilibrium contacting with a heat bath of the temperature T. (k_B is the Boltzmann constant).

Q2. Name one fermion. Also describe one physical phenomenon related to the Fermi statistics.

Q3. Name one boson. Also describe one physical phenomenon related to the Bose statistics.

Q4. Elaborate on whether the phase transition of melting of ice is the first order or not.

(To be continued on the next page)

[B]

Consider a thermodynamical system with temperature T, pressure p, entropy S, internal energy U and volume V. Answer the following questions. As for a partial derivative, explicitly specify which variables are fixed.

Q1. Express the first law of thermodynamics using infinitesimal variations dS, dU, dV for the quasi-static process.

Q2. Find the Helmholtz free energy F by using U, T and S.

Q3. Calculate the infinitesimal variation dF and find expressions for S and p in terms of F.

Q4. Derive the following relation

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V .$$

Assuming the internal energy is proportional to the volume, let us write $U = V\epsilon$ where ϵ depends only on the temperature T.

Q5. Using the first law of thermodynamics, let us write the infinitesimal variation dS as

$$dS = AdV + BdT.$$

Find the coefficients A and B by using ϵ, p, V and T.

Q6. Define the entropy density by $\sigma = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ and show the following relation

$$\sigma = \frac{\epsilon + p}{T}.$$